ESLSCA 1993 Option économique

EXERCICE 1

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que A est combinaison linéaire de A et I.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres de A.
   En déduire que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.
4. Déterminer toutes les matrices B telles que $AB = BA$.
5. Montrer qu'il existe une infinité de matrices M telles que $M^2 = A$.

EXERCICE 2

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^\times$ et que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f ; préciser la nature des branches infinies de $\mathcal{C}_f$.
3. On pose $g(x) = f(x) - x$. Montrer que l'on a $g(x) = f(-x)$, en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice du repère.
4. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 3

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des prélèvements successifs, au hasard, d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : Après *chaque* tirage, la boule obtenue est remise dans l'urne, et on ajoute *de plus* n boules de la couleur de la boule qui vient d'être obtenue, *avant* le tirage suivant. (n est un entier naturel qui sera précisé dans les questions suivantes).

1. Dans cette question n vaut 0. Soit k un entier strictement positif, quelle est la loi du nombre de boules blanches obtenues au cours des k premiers tirages ? Préciser son espérance et sa variance.
2. Dans cette question on prend $n = 1$. Quelle est la loi du nombre aléatoire de boules blanches obtenues au cours des deux premiers tirages ? des trois premiers tirages ? peut-on généraliser les résultats obtenus ?
3. Dans cette question n est choisi au début des tirages et au hasard parmi les trois nombres 0, 1 et 2. On effectue alors deux tirages et on obtient les deux fois une boule blanche. quelle est la probabilité d'avoir choisi $n = 0$? $n = 1$? $n = 2$?

EXERCICE 4

On pose : $f(x)=\int\limits_{x}^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$ et : $g(x)=\int\limits_{x}^{x^2}\frac{dt}{t.\ln(t)}$.

1. Montrer que ces intégrales ont un sens lorsque x est un nombre réel strictement positif et différent de 1.
2. Déterminer explicitement la fonction g.
3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$?
   (c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)-g(x)]$, et en déduire $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
   (b) Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1.
5. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
   Déterminer l'allure de la branche infinie de (C) et enfin donner l'allure de (C).