ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : GENERALE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

On rappelle que $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
Soit A la matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
A toute matrice $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on associe la matrice Y définie par :

$$Y = f(X) = AX + XA$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer le noyau de f, c'est-à-dire l'ensemble des matrices :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ vérifiant } f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que M soit un élément de l'image de f, c'est-à-dire pour qu'il existe $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$f(X) = M$$

   (b) Déterminer les antécédents par f de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

On considère la fonction f, définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de f; par convention $f^{(0)} = f$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \qquad (x \neq 1),$$

   où P_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré.
   Exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P'_n(x)$.

   (b) Calculer $P_n(1)$, pour n entier naturel.

   (c) Donner les expressions de P_0, P_1 et P_2.

2.

(a) Montrer que pour tout réel x différent de 1, on a :

$$(x-1)f'(x)-(x-2)f(x)=0$$

(b) En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a :

$$P_{n+1}(x)=(n+2-x)P_n(x)+n(x-1)P_{n-1}(x).$$

(c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$P_n'=-nP_{n-1}$$

3. (a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k}.
En déduire que $P_n^{(k)}(1)=(-1)^k n!$.

(b) Appliquer la formule de Taylor à P_n entre 1 et x.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{P_n(x)}{n!}=e^{1-x}$.

EXERCICE 3

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'apparition de pile (P) est p, celle de face (F) étant q avec $p+q=1$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X le rang où apparait pour la première fois deux résultats " pile " consécutifs. Ainsi, dans la série suivante de 10 lancers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F	F	F	P	F	P	F	P	P	F	...

se trouve réalisé l'évènement $(X=9)$.
Pour $n\in\mathbb{N}^\times$, on pose $a_n=P(X=n)$.

1. Calculer en fonction de p et q : a_1, a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer, en distinguant suivant le résultat du premier lancer, que, pour $n\geqslant 3$, on a :

$$a_n=qa_{n-1}+pqa_{n-2}.$$

3. On suppose à présent : $p=\dfrac{2}{3}$, $q=\dfrac{1}{3}$.

(a) Etablir que, pour $n\geqslant 1$, a_n a pour expression :

$$\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

(b) Montrer que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=1$.

(c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.