ESLSCA 1994 Option économique

EXERCICE 1

Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{3}{x})$ et u la suite définie par $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f et préciser la nature des branches infinies.

2. Vérifier que la suite u est bien définie et montrer qu'elle est monotone à partir d'un certain rang.

   (a) Pour n dans $\mathbb{N}$ on pose: $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
   Déterminer une relation simple liant v_{n+1} à v_n. Calculer v_n en fonction de v_0.
   En déduire que la suite u converge et préciser sa limite r.

   (b) Soit $e_n = u_n - \sqrt{3}$. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}$ on a : $e_{n+1} \leqslant \dfrac{(e_n)^2}{2\sqrt{3}}$ et en déduire un majorant de e_n en fonction seulement de e_1 et n. On prend alors $a = 2$, calculer u_5 et donner une majoration de e_5.

   (c) Combien suffirait-il de calculer de termes de cette suite pour obtenir une valeur approchée de r avec une erreur inférieure à 10^{-100} en prenant toujours $a = 2$?

EXERCICE 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f, ainsi que le noyau de $f \circ f$.

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

3. On pose $e_1 = (1, 1, -1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -1, -1)$.

   (a) Déterminer un vecteur e_2 tel que $f(e_2) = e_1$ et un vecteur e_4 tel que $f(e_4) = e_3 + e_4$.
   (On déterminera à chaque fois un vecteur aussi simple que possible.)

   (b) Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base B.

   (c) Calculer P^{-1}. (Le détail de la méthode utilisée, ainsi que les principales étapes de calcul, devront figurer sur la copie.)

   (d) Calculer $A' = P^{-1}AP$, et en déduire la valeur de A^n, $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

   (e) Déterminer, pour $n \geqslant 2$, l'image et le noyau de f^n (où f^n désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$, l'expression comportant n termes).

EXERCICE 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que :

$$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\, dx = \frac{2}{n}$$

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\frac{2\pi^2 k^2}{n^3} \leqslant \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} x^2 |\sin(nx)|\, dx \leqslant \frac{2\pi^2(k+1)^2}{n^3}$$

3. En déduire que :

$$\frac{\pi^2(n-1)(2n-1)}{3n^2} \leqslant \int_0^\pi x^2 |\sin(nx)|\, dx \leqslant \frac{\pi^2(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

4. En déduire enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi x^2 |\sin(nx)|\, dx$$

5. Plus généralement, soit f une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$ et croissante.

   (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqslant \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin(nx)|\, dx \leqslant \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

   (b) En déduire un encadrement de

$$\int_0^\pi f(x) |\sin(nx)|\, dx$$

   (c) En utilisant le méthode des rectangles, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(nx)|\, dx$$

EXERCICE 4

Une machine à sous est constituée de 4 roues mobiles. Chacune est partagée en p secteurs identiques dont un seul porte l'inscription "gagné". La rotation de chaque roue amène au hasard l'un quelconque de ses secteurs dans la "fenêtre" de la machine. Pour une mise de 1 Franc On a le droit d'immobiliser les roues de son choix et de faire tourner les autres.
Pour gagner à ce jeu il faut amener tous les secteurs gagnants dans la fenêtre de la machine et au départ aucun secteur gagnant n'est visible.

1. Lors d'un premier essai, on fait donc tourner les quatre roues. Soit X_1 le nombre de secteurs gagnants obtenus.
   Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est la probabilité de gagner à ce premier essai ?

2. On suppose que ce premier essai n'est pas concluant et on procède donc à un deuxième essai, en bloquant les roues ayant éventuellement amené le bon secteur.

   (a) Sachant que l'événement «$X_1 = k$», avec $0 \leqslant k \leqslant 3$, est réalisé, quelle est la probabilité degagner à ce deuxième essai ?

   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales en déduire la probabilité de gagner en exactement deux essais.

3. On note Y le nombre aléatoire d'essais effectués pour gagner à ce jeu (dès qu'une roue quelconque amène le secteur "gagné" elle est évidemment bloquée pour les essais ultérieurs et départ aucun secteur gagnant n'est visible).

   (a) Déterminer la probabilité pour qu'une roue donnée n'amène jamais le secteur gagnant cours de k essais consécutifs. En déduire la probabilité pour qu'une roue donnée amène le secteur gagnant en au plus k essais.

   (b) En déduire la probabilité de gagner en au maximum n essais ($n \in \mathbb{N}^{\times}$), puis déterminer la loi deY.

   (c) On suppose $p = 10$. Quel devrait être le montant du gain pour que le jeu soit équitable ?