ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

INSTITUT SUPERIEUR DE COMMERCE (ISC)

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : GENERALE

EXERCICE 1

On définit les deux matrices, considérées comme étant à coefficients complexes, suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$.

1. Calculer J^n pour toute valeur de l'entier n. Donner en particulier la valeur de J^5 et exprimer A à l'aide de puissances de J.

2. (a) Déterminer les valeurs propres de J et donner pour chacune d'entre elles un vecteur colonne propre dont la première coordonnée soit un 1.

   (b) En déduire que J est diagonalisable et donner, à l'aide de ω, l'expression d'une matrice de passage P telle que $P^{-1}JP$ soit diagonale.

3. (a) Dire pourquoi A est diagonalisable et donner une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que : $A = Q\Delta Q^{-1}$.

   (b) La limite d'une suite de matrices s'entendant coefficient par coefficient, montrer que (Δ^n) a une limite lorsque n tend vers l'infini et calculer cette limite. En déduire que (A^n) a une limite lorsque n tend vers l'infini.

   (c) Montrer que pour toute valeur de l'entier naturel n, la somme des éléments de toute rangée de A^n vaut 1, en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

EXERCICE 2

Une urne contient initialement n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n, avec $n \geqslant 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1. (a) Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{ième}$ tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?

   (b) En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsque l'on vide l'urne.

2. Pour k compris entre 1 et n, on dit que le résultat du $k^{ième}$ tirage est un " record " si la boule obtenue à ce $k^{ième}$ tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors. (par convention, le résultat du premier tirage sera toujours considéré comme un record).

(a) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne et pour lesquelles il n'y a qu'un seul record ? Pour lesquelles il y a n records ?

(b) Montrer que pour p et q entiers naturels, on a la relation suivante :

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+q}^p = C_{p+q+1}^{p+1}.$$

(où C_n^m est le nombre de parties à m éléments d'un ensemble à n éléments).

(c) Soit k fixé entre 2 et n et j fixé entr k et n. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles la $k^{ième}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{ième}$ tirage constitue un record ?

(d) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{ième}$ tirage est un record ?
En déduire la probabilité que le $k^{ième}$ tirage soit un record ? Pouvait-on avoir ce résultat directement ?

3. Pour k compris entre 1 et n, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du $k^{ième}$ tirage est un record et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_k. Soit R le nombre aléatoire de records obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer l'espérance de R.

PROBLEME

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : si $x \in]-1,1[$, $\quad f(x) = \exp(\dfrac{1}{x^2-1})$, sinon $f(x) = 0$.
(exp désignant la fonction exponentielle de base e)

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Plus généralement, montrer, par récurrence, que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $]-1,1[$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme : $f(x)\dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^n}$, où P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 et au voisinage de 0 de f.

5. Soit $C = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$. En partageant l'intervalle $[0,1]$ en dix parties égales, déterminer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée du nombre $\dfrac{C}{2}$. Donner un majorant de l'erreur commise.

Partie II

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{C}\int\limits_{2(x-1)}^{2(x+1)} f(t)dt$$

(C et f sont définies en I, et on a donc $g(x) = \dfrac{1}{C}\int\limits_{u}^{v} f(t)dt$ avec $u = 2(x-1)$ et $v = 2(x+1)$)

1. Montrer que g est une fonction paire.

2. Calculer $g(x)$ lorsque x appartient à $[0, \dfrac{1}{2}]$, puis lorsque x appartient à $[\dfrac{3}{2}, +\infty[$.

3. Que vaut $g(1)$?

4. Soit h la restriction de g à $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Montrer que h est dérivable, calculer $h'(x)$ et en déduire les variations de h.
5. Montrer que la courbe représentative de h, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, possède un centre de symétrie S. Préciser les coordonnées de S.
6. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit (Γ) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer (Γ). (On précisera la concavité de (Γ)).
7. Calculer $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$.

Partie III

Soient a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant : $ca < b < d$ et $a - c = d - b$. On cherche une fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telle que :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$

ii) $\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) = 1$

iii) $\forall x \in]-\infty, c] \cup [d, +\infty[, \quad \varphi(x) = 0$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{C} \int\limits_{\alpha x+\beta}^{\alpha x+\delta} f(t)dt$.
Déterminer α, β, δ pour que φ satisfasse aux conditions imposées.