ESLSCA 1995 Option économique

EXERCICE 1

Pour tout a réel non nul, on considère la fonction définie pour $x > 0$ par

$$f_a(x) = \exp((1 - x^a).\ln(x)) = x^{1-x^a}$$

et on note (C_a) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. f_a est-elle prolongeable par continuité en 0 ? le prolongement éventuel est-il dérivable en 0 ? (On distinguera selon le signe de a.)
2. Etudier, selon les valeurs de a, les éventuelles branches infinies de (C_a).
3. Déterminer, en discutant selon les valeurs de a, les variation de f_a. (On écrira $f_a'(x)$ sous la forme $x^{a--1}.g_a(x)$ pour une fonction g_a que l'on déterminera, et on pourra étudier les variations de g_a pour obtenir le signe de cette fonction.)
4. Soit a et b deux nombres réels non nuls tels que $a < b$. Déterminer les positions relatives de (C_a) et (C_b).

EXERCICE 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'endomorphisme $f \circ f - 3f$?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f, en déduire que f est diagonalisable et déterminer une base B' de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f relativement à la base B' soit diagonale. (seuls seront pris en compte les résultats correctement justifiés.)
3. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}^\times$. L'expression obtenue est-elle valable pour $n = 0$?
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.Déterminer toutes les matrices réelles carrées d'ordre 3 telles que $MD = DM$.
5. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$, où l'inconnue M est une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, et où 0 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de solutions M telle que M soit diagonale.
   (b) Montrer que si M est une solution, alors $MD = DM$.
   (c) Montrer que cette équation admet une infinité de solutions.

EXERCICE 3

1. Pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n, on pose : $I_n(x) = \int\limits_0^x \dfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$.

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier n et tout réel $x > -1$, on a :
   $$I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   (b) Calculer $I_0(x)$, en déduire $I_1(x)$, puis $I_2(x)$.

2. Prouver par récurrence que, pour tout réel $x > -1$,et pour tout entier $n > 0$:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int\limits_0^x \frac{(-1)^n(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

3. Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $u_n(x)$ définie par :
$$u_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(-1)^n(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$
Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$.

4. Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $(v_n(x))$ définie pour $n > 0$ par :
$$v_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$
Montrer que la suite $(v_n(x))$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 4

(les données de cet exercice sont évidemment fictives)
Pour fabriquer des piles, une usine dispose de deux machines, la machine A réalisant les 3/4 de la production et la machine B le reste. La probabilité qu'une pile sortant de la machine A (respectivement B) soit défectueuse est de 0,1 (respectivement 0,2), les défauts n'étant dus qu'au hasard. Chaque machine conditionne les piles qu'elle fabrique par boîtes de n piles (où n est un entier tel que $n > 2$). Toutes les boîtes sont ensuite entreposées ensemble. On prend au hasard une boîte dans l'entrepôt. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles défectueuses de cette boîte.

1. Lorsque $n = 2$, déterminer la loi de X. Calculer l'espérance de X et tracer la courbe de la fonction de répartition de X.

2. Lorsque $n = 3$, déterminer la loi de X et préciser son espérance.

3. La boîte choisie ne contenant aucune pile défectueuse, déterminer, dans le cas général, la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A.

4. Dans cette question, $n = 2$. On suppose que le poids en grammes d'une pile quelconque est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart type 1, les poids des piles étant indépendants d'une pile à l'autre. Avant l'expédition, on pèse chaque boîte et toute boîte dont le poids des piles dépasse 21 grammes est rejetée. On prend une boîte au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit rejetée ?

N.B. Φdésignant la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, on donne les résultats suivants, extraits des tables usuelles :

$$\Phi(0,5) \approx 0,69 \;\;;\;\; \Phi(0{,}7) \;\approx\; 0{,}76 \;\;;\;\; \Phi(1) \;\approx\; 0{,}84 \quad (\approx \text{ signifiant : peu différent de}).$$