

MATHÉMATIQUES 2^{ème} ÉPREUVE

OPTION : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Pour tout réel α non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$.

On pose par ailleurs : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $(A + I)(2I - A)$.
 (b) En déduire sans calcul de que -1 et 2 sont des valeurs propres de A .
 (c) A est-elle inversible ?
2. On pose $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(2I - A)$.
 (a) Montrer que $B + C = I$ et $2B - C = A$.
 (b) Montrer que $B^2 = B$ et $C^2 = C$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que $A^n = 2B^n + (-1)^n C$.
 Expliciter alors la matrice A^n .

EXERCICE 2

On étudie la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, & F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.
 (b) Ecrire en Pascal un algorithme permettant de calculer F_n pour un entier n donné.
 Calculer F_{22} .
2. Montrer qu'il existe un unique couple de réels (α, β) que l'on déterminera, tel que :

$$F_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, (F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$.
4. (a) Quelle est la limite de F_n lorsque n tend vers $+\infty$? Donner alors un équivalent de F_n .
 (b) Soit $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ pour $n \geq 1$.
 Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$? On notera ω cette limite.

- (c) Montrer que : $u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n-1}}$.
 En déduire les variations de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on a les relations :

- (a) $\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \omega < \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$.
 (b) $0 < \omega - \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n}}$.

6. En utilisant ces inégalités, écrire en Pascal un algorithme ne faisant intervenir que des opérations élémentaires sur des nombres entiers et qui donne une valeur approchée de ω à 10^{-8} près.

EXERCICE 3

1. Pour n entier naturel, on définit sur $] - 1, 1[$ les fonctions f_n , g_n et h_n suivantes :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \quad ; \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k \quad ; \quad h_n(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^k.$$

- (a) Calculer $f_n(x)$, $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$ ainsi que leur limite lorsque n tend vers $+\infty$ (pour x fixé).
 (b) Exprimer $g_n(x)$ et $h_n(x)$ à l'aide de $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
 (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$.
2. Des objets en nombre illimité sont placés successivement dans trois cas dont la capacité est illimitée. Au départ, les cas sont vides; on suppose qu'à chaque fois qu'un objet est placé, la probabilité pour qu'il le soit dans une cas donnée est égale à $\frac{1}{3}$.
 Soit Y le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux cases exactement sont occupées au moins un objet.
 Soit Z le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois cases contiennent chacun au moins un objet.
 Y et Z sont deux variables aléatoires.
- (a) Calculer pour $k \in \mathbb{N}^\times$, $P(Y = k)$.
 (b) Pour $(l, k) \in \mathbb{N}^\times \times \mathbb{N}^\times$, calculer $P(Z = l / Y = k)$.
 (c) En déduire, pour $l \geq 3$, $P(Z = l) = \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} - \frac{2}{3^{l-1}}$.
 Que vaut $P(Z = l)$ pour $l \leq 2$?
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z .