ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTION : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Pour tout réel α non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \dfrac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \dfrac{1}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$.

On pose par ailleurs : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $(A+I)(2I-A)$.
   (b) En déduire sans calcul de que -1 et 2 sont des valeurs propres de A.
   (c) A est-elle inversible ?
2. On pose $B = \dfrac{1}{3}(A+I)$ et $C = \dfrac{1}{3}(2I-A)$.
   (a) Montrer que $B + C = I$ et $2B - C = A$.
   (b) Montrer que $B^2 = B$ et $C^2 = C$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que $A^n = 2B^n + (-1)^n C$.
   Expliciter alors la matrice A^n.

EXERCICE 2

On étudie la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \in \mathbb{N}$.
   (b) Ecrire en Pascal un algorithme permettant de calculer F_n pour un entier n donné.
   Calculer F_{22}.
2. Montrer qu'il existe un unique couple de réels (α, β) que l'on déterminera, tel que :

$$F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad (F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$.
4. (a) Quelle est la limite de F_n lorsque n tend vers $+\infty$? Donner alors un équivalent de F_n.
   (b) Soit $u_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$.
   Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$? On notera ω cette limite.

(c) Montrer que : $u_{n+2} - u_n = \dfrac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n-1}}$.
En déduire les variations de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on a les relations :

(a) $\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \omega < \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$.

(b) $0 < \omega - \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \dfrac{1}{F_{2n-1}F_{2n}}$.

6. En utilisant ces inégalités, écrire en Pascal un algorithme ne faisant intervenir que des opérations élémentaires sur des nombres entiers et qui donne une valeur approchée de ω à 10^{-8} près.

EXERCICE 3

1. Pour n entier naturel, on définit sur $]-1,1[$ les fonctions f_n, g_n et h_n suivantes :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad ; \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k \quad ; \quad h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k.$$

(a) Calculer $f_n(x)$, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$ ainsi que leur limite lorsque n tend vers $+\infty$ (pour x fixé).

(b) Exprimer $g_n(x)$ et $h_n(x)$ à l'aide de $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

2. Des objets en nombre illimité sont placés successivement dans trois cas dont la capacité est illimitée. Au départ, les cas sont vides; on suppose qu'à chaque fois qu'un objet est placé, la probabilité pour qu'il le soit dans une cas donnée est égale à $\dfrac{1}{3}$.
Soit Y le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, deux cases exactement sont occupées au moins un objet.
Soit Z le nombre d'objets placés lorsque, pour la première fois, les trois cases contiennent chacun au moins un objet.
Y et Z sont deux variables aléatoires.

(a) Calculer pour $k \in \mathbb{N}^\times$, $\quad P(Y = k)$.

(b) Pour $(l, k) \in \mathbb{N}^\times \times \mathbb{N}^\times$, calculer $P(Z = l/Y = k)$.

(c) En déduire, pour $l \geqslant 3$, $P(Z = l) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{l-1} - \dfrac{2}{3^{l-1}}$.
Que vaut $P(Z = l)$ pour $l \leqslant 2$?

3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z.