ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

INSTITUT SUPERIEUR DE COMMERCE (ISC)

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTION : SCIENTIFIQUE

EXERCICE 1

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f \circ f \neq 0$ et $f^3 = f \circ f \circ f = 0$, où 0 désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On note Id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe au moins un vecteur e de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(f^2(e), f(e), e)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f relativement à une telle base ?

2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f (c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$) est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont (Id, f, f^2) est une base.

3. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

4. Montrer que si un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ commute avec f, alors $\mathrm{Id} + g \circ f$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$.

5. Peut-on trouver un endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ tel que $r \circ r = f$?

EXERCICE 2

Une urne contient initialement un nombre $n > 10$, inconnu, de boules toutes blanches. Le but de cet exercice est de présenter deux méthodes probabilistes différentes pour estimer la valeur de n, sans qu'il soit nécessaire de vider l'urne. On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement A.

1. **Méthode 1** :
   On prend dans un stock annexe 10 boules noires (de même diamètre que les boules initiales) que l'on ajoute au contenu de l'urne, puis on effectue au hasard des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue avant le tirage suivant, jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire. On note alors X le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

   (b) Déterminer, en fonction de n, la loi de X. Quelle est son espérance ? Sa variance ?

   (c) Toujours dans l'urne contenant les boules blanches et 10 boules noires, on réalise m fois l'expérience consistant à tirer des boules une à une et avec remise, jusqu'à obtenir une boule noire (que l'on replace dans l'urne avant de procéder à l'expérience suivante).
   Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note X_i le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule noire lors de la $i^{ième}$ expérience et on pose $Z_m = \dfrac{1}{m}(X_1 + X_2 + \cdots + X_m)$
   Déterminer l'espérance E_m et la variance V_m de Z_m.
   Pour $\varepsilon > 0$, que vaut : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Z_m - E_m| \geqslant \varepsilon)$?

   (d) En réalisant un grand nombre de fois l'expérience précédente, on constate qu'il a fallu, **en moyenne**, effectuer à chaque fois 6 tirages pour obtenir pour la première fois une boule noire. Quelle valeur estimez-vous pouvoir donner à n.

2. **Méthode 2** :
Dans l'urne initiale (qui contient uniquement les n boules blanches), on prélève, en une seule fois, 10 boules que l'on marque d'une croix et que l'on replace ensuite dans l'urne. On effectue alors un nouveau prélèvement au hasard d'une poignée de 10 boules de l'urne et on note Y_n le nombre aléatoire de boules marquées ainsi obtenues.

   (a) Reconnaitre, en fonction de n, la loi de Y_n.

   (b) Déterminer, en fonction de n, la probabilité, notée a_n, de l'évènement $(Y_n = 2)$. Pour quelles valeurs de n, cette probabilité est-elle non nulle ?
   Etudier la monotonie de la suite (a_n) ainsi obtenue (En considérant le quotient de terme successifs non nuls, on montrera que la suite est d'abord croissante puis décroissante).

   (c) L'expérience étant réalisée, on constate que la poignée obtenue contient exactement deux boules marquées et on décide de retenir pour valeur estimée du contenu initial de l'urne, toute valeur de n pour laquelle l'évènement $(Y_n = 2)$ a la plus grande probabilité possible.
   Quelle est, ou quelles sont, les valeurs de n ainsi retenues ?

PROBLEME

Le but de ce problème est l'étude de la fonction : $x \mapsto \int\limits_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. " ln " désignant le logarithme népérien. Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Etude de la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\text{si } x \neq 1, \quad g(x) = \frac{x-1}{\ln x} \quad \text{et} \quad g(1) = 1$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point 1.

2. g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

3. Etudier les variations de g.

Partie II : Approximation de $I = \int\limits_{2}^{4} \dfrac{dt}{\ln t}$

1. Soit h définie sur $]1, +\infty[$ par : $h(t) = \dfrac{1}{\ln t}$.

   (a) Calculer $h'(t)$, $h''(t)$, $h'''(t)$. Quelle est le signe de $h'''(t)$?

   (b) Montrer que, pour tout t de $[2, 4]$: $|h'(t)| \leqslant |h'(2)|$ et $|h''(t)| \leqslant |h''(2)|$.

2. En utilisant la méthode des rectangles et en subdivisant l'intervalle $[2, 4]$ en 10 intervalles de même amplitude, donner un encadrement de I (le détail de la méthode devra figurer sur la copie).

3. Soit φ une fonction de classe C^2 sur un segment $[u, v]$ (avec $u < v$). On définit ψ sur le segment $[u, v]$ par :$\psi(t) = \left(t - \dfrac{u+v}{2}\right) \times \varphi(t)$ et on pose :

$$\Delta = \left| \int\limits_{u}^{v} \varphi(t)dt - \int\limits_{u}^{v} \psi'(t)dt \right|$$

(a) Montrer que $\Delta = \left| \frac{1}{2} \int_u^v (t-u)(t-v)\varphi''(t)dt \right|$.

(b) En déduire que :

$$\left| \int_u^v \varphi(t)dt - \frac{v-u}{2}(\varphi(u)+\varphi(v)) \right| \leqslant \frac{(v-u)^3}{12} M_2(\varphi)$$

où $M_2(\varphi) = \sup_{t\in[u,v]} |\varphi''(t)|$.

4. Soit Φ une fonction de classe C^2 sur un segment $[a,b]$, avec $a<b$ et n un entier naturel non nul.
Pour k entier compris entre 0 et n, on pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

(a) Montrer que :

$$\left| \int_a^b \Phi(t)dt - \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n} (\Phi(a_k)+\Phi(a_{k+1})) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(\Phi)$$

où $M_2(\Phi) = \sup_{t\in[u,v]} |\Phi''(t)|$.

(b) Soit $S_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{\Phi(a)+\Phi(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \Phi(a+k\frac{b-a}{n})\right]$. Donner un programme, écrit dans un langage proche du Turbo-Pascal, permettant de calculer S_n, pour a, b, Φ, n donnés.

(c) Application : h désignant toujours la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$, donner un majorant de :

$$\left| \int_2^4 \frac{dt}{\ln t} - \frac{1}{5}\left(\frac{h(2)+h(4)}{2} + \sum_{k=1}^{9} h(2+\frac{k}{5}) \right) \right|$$

En déduire une valeur approchée de I et un majorant de l'erreur commise.

Partie III : Etude de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

1. Pour x strictement positif et différent de 1, on pose : $J(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t.\ln t}$.
Justifier l'existence de cette intégrale et calculer sa valeur.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(0)=0, \quad f(1)=\ln 2, \quad \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

(a) Montrer que, pour $x>1$, $\quad x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2$
Que devient cet encadrement si $x \in]0,1[$?

(b) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, f a-t-elle une limite en $+\infty$?

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée f'. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

(b) Etudier les variations de f ainsi que sa convexité. Quelle est la nature de la branche infinie de la représentation graphique de f ?

(c) Tracer la représentation graphique de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé.