ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTIONS : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Soient f et g les fonctions réelles définies par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{3\,(1-x^2)}$$

1. Étudier ces deux fonctions : domaines de définition, dérivées, tableaux de variation et études des branches infinies.
2. Étudier la position relative des deux courbes représentatives ; montrer en particulier que pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$, on a : $0 \leqslant f\,(x) \leqslant g\,(x)$.
3. Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de g.
   (On prendra 4 cm comme unité sur chaque axe.)
4. Soit x un réel de l'intervalle $]0;1[$.
   (a) calculer $I\,(x) = \int_0^x f\,(t)\;dt$.
   (b) Déterminer la limite de $I\,(x)$ lorsque x tend vers 1^-.
5. Pour tout entier naturel non nul n on pose :
   $$a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n\, e^{\frac{1}{12n}}$$
   (a) Établir que pour un certain réel x que l'on déterminera on a :
   $$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{f\,(x)}{x} \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \frac{1}{x}\,(f\,(x) - g\,(x))$$
   (b) En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite l vérifiant : $0,39 < l < 0,4$.
   On démontre et l'on admettra que $l = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
   Déduire de ce qui précède un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 7 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer par la méthode du pivot de Gauss trois réels λ_1, λ_2, λ_3 vérifiant $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et tels que, pour $i = 1, 2, 3$, la matrice $A - \lambda_i I$ ne soit pas inversible.

2. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P dont la première ligne est constituée de 1 ou de 0, telle que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

3. (a) Calculer P^{-1}.

   (b) Soit n un entier naturel non nul. Expliciter la matrice $B_n = 4.A^{n-1}$.
   (On notera que cette matrice est à coefficients entiers.)

4. Dans un pays, il y a trois chaînes de télévision : la $\boxed{1}$, la $\boxed{2}$ et la $\boxed{3}$.

   - Si une personne regarde la $\boxed{1}$ un soir, elle choisit le lendemain la $\boxed{1}$, la $\boxed{2}$ ou la $\boxed{3}$ au hasard.
   - Si elle regarde la $\boxed{2}$, alors le lendemain elle reste fidèle à la $\boxed{2}$.
   - Si elle regarde la $\boxed{3}$, alors elle choisit le lendemain : la $\boxed{3}$ avec une probabilité $1/3$, la $\boxed{1}$ avec une probabilité $1/12$ et la $\boxed{2}$ avec une probabilité $7/12$.

   Une personne achète un jour un poste de télévision et regarde ce soir-là une chaîne au hasard.
   On note p_n, q_n, r_n, les probabilités pour que cette personne regarde la $\boxed{1}$, la $\boxed{2}$ ou la $\boxed{3}$ le n-ème soir.

   (a) Montrer que : $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^n} B_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où B_n est la matrice calculée au **3. b.**

   (b) Déterminer les probabilités pour que cette personne regarde la $\boxed{1}$, la $\boxed{2}$ ou la $\boxed{3}$ le n-ème soir et les limites de ces probabilités lorsque $n \longrightarrow +\infty$.