**ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES**

**INSTITUT SUPERIEUR DE COMMERCE (ISC)**

**MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE**

OPTION : ECONOMIQUE

# EXERCICE 1

1. On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, par $f(t) = \dfrac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$, où ln désigne la fonction " logarithme népérien ".

   (a) Etudier les variations de $f$. Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé, ainsi que l'équation de la tangente à l'origine.

   (b) Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^\times = ]0, +\infty[$, que l'on notera $\alpha$. En déduire le signe de $f(x)$ selon la position de $x$ par rapport à $\alpha$. Montrer que $\alpha$ est comprise en 3 et 4. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.

2. On considère la fonction $g$ définie par : $g(x) = e^{-x}\ln(1+x)$ (où $x \mapsto e^x = \exp(x)$ désigne la fonction exponentielle en base $e$).

   (a) Montrer que $g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer $e^x.g'(x)$. Déterminer le signe de $g'(x)$, selon les valeurs de $x$.

   (c) Etudier les branches infinies de la représentation graphique de $g$.

# EXERCICE 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ étant rapporté à sa base canonique, on note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à $A$.
$I$ désigne la matrice unité d'ordre 4.

1. Montrer que les seules valeurs propres de $f$ sont 0 et 1. Déterminer les vecteurs propres de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

2. (a) Déterminer le noyau de $f \circ f$.

   (b) A-t-on $\ker(f \circ f) = \ker(f)$ ?

   (c) A-t-on $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f)$ ?

3. On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $\varepsilon_4 = (1, 0, 1, 1)$
   Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la matrice de $f$ relativement à cette nouvelle base ?

## EXERCICE 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on considère la fonction $f_n$, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = x + 2.x^2 + \cdots + n.x^n = \sum_{k=1}^{n} k.x^k$$

   Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera $u_n$.

2. En évaluant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

3. (a) Montrer que $f_n(x) = x \times \dfrac{1-(n+1)x^n + n.x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

   (b) Calculer $u_2$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n)^n$.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

## EXERCICE 4

Une urne contient une proportion $p$ de boules blanches et la proportion $q = 1-p$ de boules noires, avec $0 < p < 1$. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à un tirage quelconque avant le tirage suivant, jusqu'à obtenir **deux fois de suite** la même couleur et on cesse alors les tirages. On note $X$ le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule blanche aux deux premiers tirages ? d'obtenir deux fois une boule noire aux deux premiers tirages ? En déduire la probabilité de l'évènement $(X = 2)$.

2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 3)$.

3. Plus généralement, déterminer, pour tout $k \geqslant 2$, la probabilité de l'évènement $(X = k)$ (on distinguera deux cas, selon la parité de $k$).

4. Montrer que l'on a : $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

5. Montrer que $X$ admet une espérance. Calculer l'espérance de $X$.