ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 2ème ÉPREUVE

OPTIONS : SCIENTIFIQUE - ECONOMIQUE - TECHNOLOGIQUE

EXERCICE 1

Questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif. On pose :

$$I(n,\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

1. Établir la convergence de cette intégrale.

2. Calculer $I(n+1,\alpha)$ en fonction de $I(n,\alpha)$; en déduire : $I(n,\alpha) = \dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

La durée de fonctionnement, exprimée en jours, d'un certain composant électronique est une variable aléatoire D dont la densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^2 e^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Calculer β en fonction de α. Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours, calculer α. Déterminer alors l'écart-type de D.

2. Déterminer la fonction de répartition de D, puis calculer $p(D > 300)$.

3. On dispose de 100 composants similaires et on s'intéresse à la variable T égale à la moyenne des temps de fonctionnement de ces 100 composants.

   (a) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable T.

   (b) Expliquer pourquoi on peut estimer que T suit approximativement une loi normale.

   (c) Déterminer le réel t tel que $P(|T - 200| > t) \leqslant 0,05$.

4. Déterminer la densité de probabilité de la variable : $X = \sqrt{D}$.

EXERCICE 2

$\mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 5. On note E l'ensemble des matrices A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels quelconques.
On note I l'élément de E obtenu pour $a = 1$ et $b = 0$ et J celui obtenu pour $a = 0$ et $b = 1$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ admettant (I, J) pour base.

2. **Étude des puissances d'un élément A de E.**

   (a) Calculer J^2 en fonction de J. En déduire J^k pour k entier naturel non nul.

   (b) Prouver que le produit de deux éléments de E est un élément de E.

   (c) Soit $A = aI + bJ$ un élément de E. Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour p entier naturel, on a :
   $$A^p = a^p I + \left(\frac{(a+2b)^p - a^p}{2}\right) J$$

3. **Inversibilité d'un élément A de E.**

   (a) Soit $A = aI + bJ$ un élément quelconque de E. Montrer que A est une matrice inversible de $\mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ si et seulement si on a :
   $$a \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a + 2b \neq 0$$

   (b) On suppose que A est inversible dans $\mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ et on note A^{-1} l'inverse de A.
   Soit u l'application de E dans lui-même qui à tout élément M de E associe l'élément
   $$u(M) = AM.$$
   Prouver que u est un automorphisme de E.
   En déduire que A^{-1} est un élément de E.

   (c) Déterminer la décomposition de A^{-1} dans la base (I, J) en fonction de a et b.