ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

MATHÉMATIQUES 1ère ÉPREUVE

OPTIONS : ECONOMIQUE

EXERCICE 1

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ celui des nombres entiers naturels. On considère la fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right).$$

On rappelle que $2,71 \leqslant e \leqslant 2,72$

1. Etudier les variations de f, donner sa représentation graphique et préciser la nature des branches infinies de celle-ci.
2. Résoudre l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{2}$
3. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
4. Calculer l'aire A du domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad f(x) \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}\}$
5. On appelle point fixe de f tout nombre α tel que $f(\alpha) = \alpha$. On se propose d'étudier les points fixes de f par le biais d'une fonction auxiliaire g définie par $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Donner le tableau de variation de la dérivée g' de g après étude du signe de la dérivée seconde g''.
   (b) En déduire qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $g'(t) = 0$, sans essayer de le calculer.
   (c) Encadrer t entre deux entiers consécutifs.
   (d) Calculer t.
   (e) Donner le tableau de signe de g' puis dresser le tableau des variations de g. Montrer que g admet un minimum strictement négatif.
   (f) En déduire que f admet exactement deux points fixes.
6. On se restreindra désormais à l'intervalle $I = [0; 1]$. Montrer que f n'admet qu'un seul point fixe $\alpha \in I$.
7. Montrer que l'intervalle I est stable par f.
8. On définit une suite par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les u_n appartiennent tous à I.
9. Démontrer que : $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
10. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$. Achever l'étude de (u_n).

EXERCICE 2

Soit les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad J = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^k pour tout entier naturel k. On n'oubliera pas le cas où $k = 0$.

2. En déduire les puissances n-ième de A, en remarquant que $A = I + J$. Expliciter A^n et vérifier la validité du résultat pour $n = 0$; $n = 1$ et $n = 2$.

3. On dispose de deux boîtes U et V :
   U contient 3 boules blanches et 2 boules noires
   V contient 2 boules blanches et 3 boules noires

   On tire des boules une à une, chaque boule étant remise immédiatement dans la boîte d'où elle provient avant le tirage suivant. La première boule est tirée de U. Si elle est blanche, la seconde boule est tirée de U; si la première boule tirée est noire, la seconde boule est tirée de V. A chaque étape si le n-ième tirage donne une boule blanche alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectuera dans U, alors que si le n-ième tirage donne une boule noire alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectuera dans V. On définit les événements suivants, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   B_n : «le n-ième tirage donne une boule blanche »
   N_n : « le n-ième tirage donne une boule noire »
   On pose $p_n = P(B_n)$, $q_n = P(N_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

   (a) Donner les valeurs de p_1 et q_1.
   (b) Calculer, par une méthode clairement justifiée, p_2 et q_2.
   (c) Pour tout n, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
   (d) En déduire un algorithme de calcul des p_n et des q_n. Le traduire en Turbo-Pascal.
   (e) Donner X_{n+1} en fonction de X_n.
   (f) En déduire le calcul de p_n et q_n.

4. On considère encore la suite de tirage de la question 3. On définit la variable aléatoire T égale au temps d'attente de la première boule blanche : pour tout $n \geqslant 1$, l'événement $(T = n$ signifie que la première boule blanche est apparue au n-ième tirage.

   (a) Donner la distribution de probabilité de T.
   (b) Vérifier que la somme des probabilités des événements $(T = n)$ vaut bien 1.
   (c) Calculer $E(T)$ et $V(T)$. On citera explicitement, aux questions b) et c) les résultats de cours utilisés ainsi que leur condition de validité.

EXERCICE 3

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On appellera ici $\mathcal{B}$ sa base canonique $(1, X, X^2)$. Un polynôme sera noté indifféremment $Q(X)$ ou Q; à chaque $Q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe la polynôme suivant, noté aussi $\Phi(Q(X))$ ou $\Phi(Q)(X)$:

$$\Phi(Q) = (2X+1)Q(X) - (X^2-1)Q'(X)$$

où Q' est le polynôme dérivé de Q.

1. Vérifier que cela définit bien un endomorphisme Φ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer son noyau $\ker(\Phi)$.

3. En déduire que Φ est bijectif.

4. Donner la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

5. Déterminer le spectre $Sp(A)$ de la matrice A. En déduire immédiatement que A est diagonalisable.

6. Déterminer le sous-espace propre E_a de A pour tout $a \in Sp(A)$

7. On range les valeurs propres par ordre strictement croissant. Trouver une matrice P inversible telle que la matrice $A' = P^{-1}AP$ soit diagonale :
$$A' = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$
On respectera la contrainte suivante : la première ligne de P doit être égale à $(1, 1, 1)$.

8. Déduire de la question 7. le calcul de A^n pour tout entier naturel n.

9. On rappelle que $\Phi^0 = \mathrm{Id}, \quad \Phi^1 = \Phi, \quad \Phi^2 = \Phi \circ \Phi$, etc.. Déduire de la question 7. la calcul de Φ^n pour tout n.
Autrement dit, étant donné un polynôme quelconque $Q(X) = aX^2+bX+c$, expliciter le polynôme $\Phi^n(Q(X))$ en fonction de n, a, b et c.

EXERCICE 4

Soit la fonction à deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x, y) = 2x^2y^4 + 3x^3y^3 + x^2y^3$. Etudier l'existence d'extrema locaux de f.