ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option générale**

# MATHEMATIQUES I

**Année 1978**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

## PARTIE I

1. $V(x)$ étant un polynôme à coefficients complexes, que dire du polynôme

$$W(x) = \frac{1}{3}\left(V(x) + V(jx) + V(j^2x)\right) \quad \text{où} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ ?}$$

2. Au polynôme $Q(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ on associe le polynôme $T(x)$ :

$$T(x) = Q(x).Q(jx).Q(j^2x)$$

Montrer que $T$ est un polynôme en $x^3$ ; on pose $T(x) = H(x^3) = H(X)$. Préciser les racines de $H(x)$. Expliciter H(X). Généraliser.

## PARTIE II

Dans ce paragraphe seules seront prises en considération les réponses explicitées à l'aide d'un dessin ; sauf mention du contraire $a$ et $b$ sont deux nombres respectivement complexe et réel.

1. Pour $b$ donné strictement positif trouver le lieu de $a$ défini par :

$$|a + 2b| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |a - b| \leqslant 1$$

Résumer clairement les cas particuliers suivants :

(a) $|a+2b|=1$ et $|a-b|\leqslant 1$
(b) $|a+2b|\leqslant 1$ et $|a-b|=1$
(c) $|a+2b|<1$ et $|a-b|<1$

2. Quel est quand $b$ réel varie le lieu de $a$ défini par : $|a+2b|=1$ et $|a-b|=1$ ; (module de $a-b=1$ ) .

3. $b$ étant maintenant un nombre complexe donné trouver le lieu de $a$ défini par $|a+2b|\leqslant 1$ et $|a-b|\leqslant 1$. Quelle région du plan décrit alors b pour que le problème soit possible ?

Dans la suite de ce problème, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ est repéré par sa base canonique $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ où $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

Tout endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ peut ainsi être caractérisé par la matrice qui le repère dans la base canonique ; les matrices seront donc des matrices carrées, d'ordre 3, à éléments réels ou complexes. Un nombre complexe $a$ représentera indifféremment la matrice scalaire $\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ ou l'endomorphisme qu'elle repère ; donc 1 désigne indifféremment l'application identique ou la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

# PARTIE III

Nous disons qu'une suite $(M_n)$ de matrices tend vers une matrice limite $L$ et nous écrivons $M_n\to L$ si et seulement si le terme général de position $p,q$ de la matrice tend vers le terme de même position de la matrice $L$ quand $n$ tend vers l'infini. Les grandes lettres de ce paragraphe représentent des matrices.

1. Montrer que si $M_n\to L$ et $M'_n\to L'$ alors $M_n+M'_n\to L+L'$.

2. Montrer que si $M_n\to L$ et $M'_n\to L'$ alors $M_n.M'_n\to L.L'$.

3. Montrer que si $M_n\to 0$ alors $1+M_n$ a un déterminant qui tend vers 1.

4. Montrer que si $A^n\to 0$ alors la matrice $1-A$ est inversible.

5. Montrer que si $(x_n)$ est une suite de complexes telle que $x_n\to x_0$ alors $x_n.A\to x_0.A$

# PARTIE IV

Soient deux endomorphismes $u_1$ et $u_2$ de $\mathbb{C}^3$ tels que

$$(\pi)\qquad u_1+u_2=1,\quad u_1\circ u_2=0,\quad u_1\neq 0,\quad \operatorname{rg} u_1\leqslant \operatorname{rg} u_2$$

où $\operatorname{rg} u_1$ par exemple désigne le rang de $u_1$ c'est-à-dire la dimension de $\operatorname{Im} u_1=u_1(\mathbb{C}^3)$.

1. (a) A-t-on $u_2=0$ ? Montrer que $u_2$ n'est pas bijectif.
   (b) Montrer que $u_1$ et $u_2$ sont linéairement indépendants.
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} u_1$ et $\operatorname{Im} u_2$ sont supplémentaires.
   (d) Préciser les rangs de $u_1$ et $u_2$.

2. Soient deux complexes $\alpha_1$ et $\alpha_2$ non simultanément nuls. On considère l'endomorphisme $u$ défini par $u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$ ; $u_1$ et $u_2$ vérifiant toujours les conditions $(\pi)$.
   (a) Expliciter $(u-\alpha_1)\circ u_1$, $(u-\alpha_2)\circ u_2$.
   (b) A-t-on $(u-\alpha_1)\circ(u-\alpha_2)=0$ ?

3. $v$ étant un endomorphisme <u>non</u> scalaire de $\mathbb{C}^3$, on aimerait résoudre en $\alpha_1, \alpha_2, u_1$ et $u_2$ l'équation définie par $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ où $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont deux complexes et $u_1$ et $u_2$ deux endomorphismes vérifiant $(\pi)$.

   (a) Caractériser $v$ pour que le problème soit possible et montrer qu'alors il n'admet qu'une solution.

   (b) <u>Application</u>. On désigne par $A_1$ et $A_2$ les matrices associées à $u_1$ et $u_2$. Résoudre le problème posé dans la question 3 pour $v$ donné par sa matrice associée dans les quatre cas suivants :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# PARTIE V

Reprenons $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Comment choisir $a$ et $b$ pour que $A^n \to 0$ ?
2. Montrer qu'alors la suite de matrices définie pour $n \geqslant 1$ par
$$B_n = 1 + A + A^2 + \cdots + A^n$$
converge ; calculer sa limite.
3. Résoudre en $A$ l'équation $A^3 = 1$.
4. Peut-on avoir $A^3 = A_1$ ?

# PARTIE VI

Toujours pour $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $(jK - 1)(j^2K - 1)$ et $(K-1)(K-j)(K-j^2)$.

On considère les matrices $P(K) = \dfrac{1}{3}(1 + K + K^2)$, $P_2 = P(j^2K)$, $P_3 = P(jK)$ et $P_2 + P_3$.

1. Montrer que deux de ces matrices ont déjà été identifiées antérieurement.
2. Préciser les produits deux à deux des trois matrices $A_1$, $P_2$ et $P_3$.

   (a) Soit $X$ l'espace vectoriel engendré par $A_1$, $P_2$ et $P_3$ ; montrer qu'il est multiplicativement stable.

   (b) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $X$ ?

   (c) On pose $M = M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ ; décomposer $M$ sur $A_1$, $P_2$ et $P_3$.
3. Soit $D(a,b,c) = M(a,b,c).M(a,bj,cj^2).M(a,bj^2,cj)$ ; l'expliciter, si possible sans calcul.
4. Soit $S = M(a,b,c)$ telle que : $a+b+c = j$, $a + bj + cj^2 = j^2$, $a + bj^2 + cj = 1$.
Donner le déterminant de $S$ et montrer que lorsque $k$ parcourt $\mathbb{N}$, les matrices $S^k$ forment un ensemble fini dont on précisera le nombre d'éléments.
5. Même question en prenant maintenant :
$a+b+c = \theta^p$, $a + bj + cj^2 = \theta^q$, $a + bj^2 + cj = \theta^r$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p, q, r$ sont trois entiers appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
<u>Application</u>. $n = 180$, $p = 30$, $q = 24$ et $r = 12$.

## PARTIE VII

Montrer que l'ensemble $\{M(x+y,-x,-y) \quad / \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ est un sous anneau de $X$ isomorphe à $\mathbb{C}$.