ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations:

Si Z est une variable aléatoire, on note $E(Z)$ son espérance mathématique et $V(Z)$ sa variance.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, $\mathcal{B}(n,p)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et p.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ désigne la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

Données :

- Dans tout le problème, p désigne un nombre réel vérifiant $0 < p < 1$ et l'on note $q = 1 - p$.
- Dans les parties I et II seulement, n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 1, un triplet (X, Y, N) de variables aléatoires réelles est défini par les conditions :

  (1) N est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
  On note, pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, $\alpha_k = P(N = k)$ et pour tout x réel, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$.

  (2) Pour tout entier naturel k élément de $N(\Omega)$:

  - la loi conditionnelle de X, sachant que l'événement $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{U}_k$
  - la loi conditionnelle de Y, sachant que l'événement $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{B}(k,p)$.

PARTIE I

1. Pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, en distinguant le cas $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$ du cas contraire, calculer en fonction des données la probabilité de l'événement $(X = i) \cap (N = k)$. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
   Si X' désigne la variable aléatoire $N - X$, que valent $E(X')$ et $V(X')$?

3. Déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N, sachant que l'événement $(X = 0)$ est réalisé, soit $\mathcal{U}_n$. Cette condition étant satisfaite :

   - Comparer les deux variables aléatoire N et $n - X$.
   - Déterminer en fonction de n : $E(N)$, $V(N)$, $E(X)$, $V(X)$.
   - Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ la loi conditionnelle de N sachant que l'événement $(X = i)$ est réalisé.

4. On revient au cas général et l'on note, pour tout x réel : $G(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(X = i)x^i$.
   Démontrer que, pour tout x différent de 1 :

$$G(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x F(t)dt$$

PARTIE II

1. Pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer en fonction des données, $P((Y = i) \cap (N = k))$.
   En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

2. Calculer $E(Y)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
   Si Y' désigne la variable aléatoire $N - Y$, que valent $E(Y')$ et $V(Y')$?

3. Soit q' appartenant à $]0,1[$ (on note $p' = 1 - q'$), déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N, sachant que l'événement $(Y = 0)$ est réalisé, soit $\mathcal{B}(n, q')$.
   Cette condition étant satisfaite, déterminer en fonction de n, p, p'

   (a) La loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   (b) $E(N)$, $V(N)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
   (c) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ la loi conditionnelle de N, sachant que l'événement $(Y = i)$ est réalisé.

4. On revient au cas général et l'on note, pour tout x réel :

$$H(x) = \sum_{i=0}^{n} P(Y = i)x^i$$

   Démontrer que, pour tout réel x :

$$H(x) = F(px + q)$$

5. Montrer que la loi de probabilité de X quand N suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est égale à celle de Y quand N suit la loi ?.

(on pourra utiliser les fonctions G et H.)

PARTIE III

On note C^0 l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note C^∞ l'ensemble des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout réel λ, on note E_λ l'ensemble des éléments f de C^0 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(px+q) \;=\; \lambda f(x)$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 réel et de la relation valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = pu_n + q$.

   Déterminer u_n en fonction de u_0. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite. Si $f \in E_\lambda$, exprimer $f(u_n)$ en fonction de λ et de $f(u_0)$.

2. Soit λ réel tel que E_λ ne soit pas réduit à la fonction nulle.
   Montrer que nécessairement $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

   Déterminer E_1.

   Si $f \in E_\lambda$ et $\lambda \neq 1$, que vaut $f(1)$?

3. (a) Montrer que, si $f \in E_\lambda \cap C^\infty$, il existe un entier naturel k tel que $f^{(k+1)}$ soit la fonction nulle. (on pourra raisonner par l'absurde en remarquant que si $f \in E_\lambda$, alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $f^{(n)} \in E_{\lambda/p^n}$.

   (b) On suppose qu'il existe λ réel et f non constante tels que $f \in E_\lambda \cap C^\infty$.
   Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $f^{(n_0+1)}$ soit la fonction nulle.
   Montrer que : $\lambda = p^{n_0}$, $\qquad f(1) = f'(1) = \cdots = f^{(n_0-1)}(1) = 0$.
   Déterminer f.

   (c) En déduire, pour toute valeur de λ, l'ensemble $E_\lambda \cap C^\infty$.

4. Soit Φ l'application de C^0 dans lui-même telle que, pour tout élément f de C^0,

$$\Phi(f) = h, \qquad \text{où} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)dt & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   (a) Vérifier que, pour tout élément f de C^0, $h = \Phi(f)$ appartient bien à C^0, que $h = \Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

   (b) Montrer que Φ est linéaire.

5. On dit que f, élément de C^0, est propre pour Φ si $h = \Phi(f)$ est proportionnelle à f.

   (a) Montrer que si f est propre pour Φ, a fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(px+q)$$

   l'est également.

   (b) Déterminer les fonctions propres pour Φ, non nulles (on cherchera leur restriction à chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1. +\infty[$, et on tiendra compte de leur nécessaire continuité au point 1.

   (c) En déduire que, pour tout λ appartenant à $]0,1]$, E_λ n'est pas réduit à la fonction nulle et donner un élément non nul de E_λ.

6. On suppose ici que $p = q = \dfrac{1}{2}$ et on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda^{-k}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k}(x-1)\right) & \text{si } x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^\times \\ f(1) = 0 & \\ f(x) = f(2-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Vérifier que f est bien définie pour tout x réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ est-elle continue au point 1 ?
λ étant ainsi choisi, montrer que f appartient à E_λ.
En déduire, pour $p = \dfrac{1}{2}$ l'ensemble Λ des λ réels tels que E_λ ne soit pas réduit à la fonction nulle. Que peut-on dire si $\lambda \in \Lambda \backslash \{1\}$ de la dimension de E_λ ?