ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Partie 1

1. On définit deux endomorphismes j et k de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement les matrices J et K définies par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que les endomorphismes j et k commutent.

   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres des endomorphismes j et k.

   (c) On note E_4 le sous espace propre de j associé à la valeur 4. Montrer que k laisse E_4et $\ker(j)$ invariant.

   (d) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices des endomorphismes j et k sont diagonales. (Remarquer qu'une telle base est formée de vecteurs propres à la fois pour j et k).
   On note désormais E le sous ensemble de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

3. Déduire de la question 1 une matrice P inversible de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de a et de b, telle que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ soit diagonale. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $M(a,b)$.

4. (a) Montrer que le produit de deux éléments de E est encore dans E.
   (b) Montrer que :$(M(a,b))^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$

Partie 2

On considère un damier constitué de neuf cases $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, I_1, I_2, I_3$ et I_4.

P_2	I_1	P_3
I_4	P_1	I_2
P_4	I_3	P_5

Un pion "saute" à l'intérieur de ce damier de manière aléatoire de la case sur laquelle il se trouve vers une des autres cases qui possède avec celle-ci un côté commun. Par exemple :

- de P_1, le pion saute avec équiprobabilité vers I_1, I_2, I_3 ou I_4.
- de P_2, le pion saute avec équiprobabilité vers I_1 ou I_4.
- de I_1, le pion saute avec équiprobabilité vers P_1, P_2 ou P_3.

On suppose que le pion se situe au départ (c'est à dire avant le premier saut) sur l'une des cases P_1, P_2, P_3, P_4 ou P_5.

1. Dans ces conditions, sur quelles cases peut se trouver le pion après un nombre pair de sauts ? Après un nombre impair de sauts ?
   Dans toute la suite du problème, on utilisera les notations suivantes :

   - Pour tout $k \in \{1;2;3;4;5\}$ on désigne par $p_{k,0}$ la probabilité pour que le pion se situe sur la case P_k au départ, et pour tout entier n, $n \geqslant 1$, par $p_{k,n}$ la probabilité pour que le pion se situe sur la case P_k à l'issue du $(2n)^{ème}$ saut.
   - Pour tout $k \in \{1;2;3;4\}$ et pour tout entier n, $n \geqslant 1$, on désigne par $y_{k,n}$ la probabilité pour que le pion se situe sur la case I_k à l'issue du $(2n-1)^{ème}$ saut.
   - On note enfin : $\forall n \in N, \quad \Pi_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ y_{3,n} \\ y_{4,n} \end{pmatrix}$

2. Montrer qu'il existe deux matrices $A \in \mathfrak{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{5,4}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera, telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$Y_n = A\Pi_{n-1} \quad \text{et} \quad \Pi_n = BY_n.$$

3. (a) Calculer $G = AB$ et montrer que la matrice G appartient à E (ensemble défini dans la partie I). En déduire que $G^n = M(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\times 3^n})$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) On pose $F = BA$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, donner une expression simple de F^n en fonction de A, B, G et n. Calculer alors F^n.

4. Soient r et s deux entiers naturels non nuls tels que $r < s$. Soient de plus $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r;\mathbb{R}^s)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^r)$ deux applications linéaires.

   (a) Montrer que $g \circ h$ et $h \circ g$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

(b) Montrer que 0 est valeur propre de $g \circ h$.

(c) En déduire les valeurs propres de la matrice F, et trouver les sous espaces propres correspondants. En déduire que la matrice F est diagonalisable.

(d) Remarquer que $\Pi_{n+1} = F\Pi_n$ pour tout entier naturel n. Montrer alors qu'il existe une position initiale Π_0 (que l'on déterminera) telle que pour tout $n \geqslant 1$, Π_n ne dépende pas de n.

5. (a) Quelle est la probabilité pour que le pion se situe en P_1 à l'issue du $(2n)^{ème}$ saut $(n \geqslant 1)$? Cette probabilité dépend-elle de la position initiale du pion ? Ce résultat était-il prévisible ?

   (b) Soit n un entier naturel non nul. On note X_1 la variable aléatoire indiquant le nombre de passages sur la case P_1 en $2n$ sauts. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

   (c) Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_1 égale au nombre de sauts nécessaires pour obtenir le premier passage par la case P_1 lorsque le pion se situe au départ sur l'une des cases P_2, P_3, P_4 ou P_5.

   (d) Quelle est, sous les mêmes hypothèses qu'au c), la probabilité pour que le pion passe par P_1 ?

6. (a) Quelle est, en fonction de la position initiale du pion, la probabilité pour qu'il se situe en P_2 à l'issue du $(2n)^{ème}$ saut $(n \geqslant 1)$?

   (b) Déterminer, en fonction de la position initiale du pion, l'espérance mathématique du nombre X_2 de passages par P_2 en $2n$ sauts.

   (c) Soient n et k deux entiers naturels non nuls. On suppose que le pion se situe au départ sur la case P_1. Calculer la probabilité pour que le pion se trouve sur la case P_2 après $2(n+k)$ sauts, sachant qu'il n'était pas sur la case P_2 à l'issue du $(2n)^{ème}$ saut.

7. On suppose toujours que le pion part de la case P_1. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2 définie dans la question 6)b) dans le cas $n = 3$.