ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes en x à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[x]$ la partie de $\mathbb{R}[X]$ formée par l'ensemble des polynômes de degré n au plus.

Dans tout le problème s désigne une constante réelle donnée.

Enfin, si un polynôme s'introduit sous l'aspect d'une fraction rationnelle, il en est par définition la forme réduite, que l'on obtiendrait après simplification car le numérateur est un multiple du dénominateur.

PARTIE I

PARTIE A

A tout polynôme P on associe $\widehat{P}$ défini par $\widehat{P}(x) = \dfrac{1}{x-s}\int_s^x P(t)dt$

1. Montrer que $\widehat{P}$ est un polynôme.
2. Soit $\overline{u}$ l'application définie par $\overline{u}(P) = \widehat{P}$. Montrer que $\mathbb{R}_0[x] = \mathbb{R},\ \mathbb{R}_1[x],\ \mathbb{R}_2[x], ..., \mathbb{R}_n[x]$ sont stables par $\overline{u}$.
3. Montrer que $\overline{u}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE B

Soit u la restriction de $\overline{u}$ à $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Montrer que u admet quatre valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3. On les indexe pour avoir $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$.

2. Expliciter une base (T_0, T_1, T_2, T_3) constituée de vecteurs propres, T_k étant associé à la valeur propre λ_k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Décomposer x^3 sur T_0, T_1, T_2 et T_3.

PARTIE C

On pose $L(x) = (x - \lambda_0)(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$ puis on définit quatre polynômes par

$$L_0(x) = \frac{4L(x)}{x - \lambda_0}, \quad L_1(x) = \frac{-48L(x)}{x - \lambda_1}, \quad L_2(x) = \frac{108L(x)}{x - \lambda_2} \quad \text{et} \quad L_3(x) = \frac{-64L(x)}{x - \lambda_3}$$

1. Calculer $L_0 + L_1 + L_2 + L_3$.

2. Calculer $L_0 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{4}L_3$.

3. Si, dans un polynôme en x nous remplaçons l'indéterminée x par u et le produit par la composée d'endomorphismes, nous obtenons un polynôme en u. Par exemple $2x^3 - 4x^2 + 1$ donnerait $2u^3 - 4u^2 + Id$; ici u^2 est l'application $u \circ u$ et Id l'application identique.
   On pose : $\ell = L(u)$, $\ell_0 = L_0(u)$, $\ell_1 = L_1(u)$, $\ell_2 = L_2(u)$ et $\ell_3 = L_3(u)$

   (a) Déterminer ℓ.
   (b) Calculer, pour $k \in [\![0, 3]\!]$, les endomorphismes $\ell_k^2 - \ell_k$.
   (c) Expliciter les espaces images $\ell_0(\mathbb{R}_3[x])$, $\ell_1(\mathbb{R}_3[x])$, $\ell_2(\mathbb{R}_3[x])$ et $\ell_3(\mathbb{R}_3[x])$.

PARTIE II

PARTIE A

A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on associe le polynôme défini par :

$$\widetilde{P}(x) = \frac{1}{(x - s)^2} \cdot \int_s^x \left(\int_s^y P(t)dt \right) dy$$

et on pose $\overline{v}(P) = \widetilde{P}$.

1. Calculer $\overline{v}(H)$ où $H(x) = x + 1$.

2. Montrer que $\overline{v}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE B

Soit v la restriction de $\overline{v}$ à $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Montrer que v est un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Expliciter v sous la forme d'un polynôme en u.

3. Montrer que v est un polynôme en u^2.

4. L'endomorphisme $v - u^2$ est-il injectif ?

PARTIE B

On considère six nombres réels et distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et s ; s est toujours le nombre introduit dans le préambule.
On pose $A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$.
Pour $p \in [\![1,4]\!]$, on définit $A_p(x)$ par $A_p(x) = \dfrac{A(x)}{(x-\alpha_p)A'(\alpha_p)}$
Enfin pour $p \in [\![1,5]\!]$, on définit g_p par $g_p(P) = \widetilde{P}(\alpha_p)$.

1. Pour $p \in [\![1,4]\!]$ et $q \in [\![1,4]\!]$, calculer $A_p(\alpha_q)$.
2. Montrer que les applications g_i sont des formes linéaires ; quel est-le rang de la famille $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$?
3. Comment déterminer quatre polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 qui, pour $p \in [\![1,4]\!]$ et $q \in [\![1,4]\!]$, vérifient : $g_p(B_p) = 1$ et, pour $p \neq q, \quad g_p(B_q) = 0$?
4. Pour $p \in [\![1,4]\!]$, on pose $B_p = b_{p,0}T_0 + b_{p,1}T_1 + b_{p,2}T_2 + b_{p,3}T_3$.
   Expliciter les coefficients $b_{p,k}$ à l'aide des valeurs prises par A_p ou ses dérivées en $x = s$.

PARTIE D

Les combinaisons linéaires en $g_1,\ g_2,\ g_3$ et g_4 demandées dans ce paragraphe ont des coefficients qui s'expriment simplement en fonction des valeurs prises par $A_k(x)$ ou $A'_k(x)$ en des points appartenant à $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Seules seront retenues les réponses qui se présenteront sous cet aspect.

1. Expliciter g_5 comme combinaison linéaire de $g_1,\ g_2,\ g_3$ et g_4.
2. On définit f par $f(P) = \widetilde{P}'(\alpha_5)$. Expliciter f comme combinaison linéaire de $g_1,\ g_2,\ g_3$ et g_4. ($\widetilde{P}'$ est la dérivée de $\widetilde{P}$).
3. Posant $f_i(P) = \widehat{P}(\alpha_i)$ pour $i \in [\![1,4]\!]$, expliciter f_i comme combinaison linéaire de $g_1,\ g_2,\ g_3$ et g_4.

PARTIE III

On prend $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, s) = (1, -1, 2, -2, 3, 0)$.

1. Expliciter les quatre polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 sur la base canonique $(x^3, x^2, x, 1)$.
2. Donner les coefficients de la décomposition de g_5 sur g_1, g_2, g_3 et g_4.
3. Donner les coefficients de la décomposition de f sur g_1, g_2, g_3 et g_4.