ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les parties II, III, IV, sont, dans une large mesure, indépendantes.

Question préliminaire :

Montrer que, si X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^{\times}$, on a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$$

PARTIE I

1. Soient p et q deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant q$. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$?

2. n et r désignant deux entiers naturels non nuls, on note :

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \begin{array}{c} [\![1,n]\!] \to [\![1,r]\!] \\ i \mapsto f(i) \end{array} \quad / \quad \sum_{i=1}^{n} f(i) = n+r-1 \right\}$$

et $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n+r-1]\!]$.
Montrer que l'application Φ de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{F}_1,\ \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \Phi(t)(k) = \sum_{i=1}^{k} f(i)$$

est une bijection.
En déduire le cardinal de $\mathcal{F}_1$.

3. n, N, m désignant des entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant m \leqslant N+n-1$, déduire des résultats précédents le nombre de n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ éléments de $[\![1, n]\!]^n$:

   (a) tels que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant m$

   (b) tels que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = m$

   (c) tels que $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ (on supposera ici $n \geqslant 2$)

   (d) tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$ (on pourra remarquer qu'un tel n-uplet est entièrement défini par les nombres, éventuellement nuls, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ de 1, de 2,..., de N qui y figurent, puis prendre comme inconnues $1 + y_1$, $1 + y_2, \ldots, 1 + y_N$ de façon à utiliser **I-3-b** convenablement adapté).

   A titre indicatif, et en vue de leur utilisation éventuelle dans la suite du problème, les réponses aux questions **3-a), b), c), d)** sont respectivement :

$$C_m^n,\ C_{m-1}^{n-1},\ C_N^n \text{ (si } n \leqslant N),\ C_{N+n-1}^n$$

   Dans-toute la suite, N désigne un entier supérieur ou égal à 3, et l'on considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

> Dans la partie **II**, on tire " au hasard et sans remise " chacun des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, ..., u_N)$ la suite des nombres ainsi obtenus.
> Dans les parties **III, IV**, on tire " au hasard et avec remise " des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, ..., u_n, \ldots)$ la suite des nombres ainsi obtenus.

PARTIE II

Soit X_N la variable aléatoire égale au plus petit entier $r \geqslant 1$, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$, sinon à N.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X_N > n)$.

2. En déduire la loi de probabilité de X_N et son espérance mathématique $E(X_N)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = k) = \lim_{N \to +\infty} P(X_N = k)$$

   Démontrer que X possède une espérance mathématique, et la comparer à $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

PARTIE III

1. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, $v_n = P(u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n)$. On pose, dans la suite, $v_1 = 1$.

2. Montrer que les séries de termes généraux respectifs v_n, nv_n, et $w_n = v_n - v_{n+1}$ convergent. Que vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$?

3. En déduire l'existence d'une variable aléatoire Z_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$, telle que $Z_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$.
   Montrer que Z_N admet une espérance mathématique $E(Z_N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

4. Ecrire la formule de Mac-Laurin, avec reste de Lagrange, pour la fonction : $x \mapsto (1+x)^{-N}$; en déduire une expression de $\sum_{n=1}^{p} v_n$, puis $E(Z_N)$.
   Déterminer $\lim_{N \to +\infty} E(Z_N)$.

5. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(Z=k) = \lim_{N \to +\infty} P(Z_N = k)$$

   Comparer Z et X.

PARTIE IV

1. k appartenant à $[\![1, n]\!]$ et n à $\mathbb{N}^\times$, quelle est la probabilité de l'événement :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad k < u_{1+i}$$

   En déduire, pour n élément de $\mathbb{N}^\times$, la probabilité de l'événement A_n défini par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u_1 < u_{1+i}$$

2. Montrer que la série de terme général x_n défini par $x_0 = 1$ et $x_n = P(A_n)$ si $n \geqslant 1$ converge et calculer sa somme.

3. Prouver l'existence d'une variable aléatoire T_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$, telle que $T_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier strictement positif tel que :

$$u_{r+1} \leqslant \inf(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

4. Montrer que T_N admet une espérance mathématique que l'on calculera.
   Déterminer $\lim_{N \to +\infty} E(T_N)$.

5. $n \in \mathbb{N}^\times$; déterminer, en utilisant la valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$, $\lim_{N \to +\infty} P(T_N > n)$.
   Montrer qu'il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(T=k) = \lim_{N \to +\infty} P(T_N = k)$$

   et que T ne possède pas d'espérance mathématique.