ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A. Interprétation

Soient a et b deux constantes réelles telles que $a < b$ et soit f une fonction continue. Préciser la surface ayant pour aire algébrique

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)$$

B. Problème

A toute fonction continue $x \mapsto u(x)$ on associe au-delà d'un certain rang n_0, précisé par le texte, les séries de termes généraux

$$\overline{u}_n = \int_n^{n+1} u(x)dx - u(n)$$

$$\widetilde{u}_n = \int_n^{n+1} u(x)dx - \frac{1}{2}\left(u(n)+u(n+1)\right)$$

Dans ce problème plusieurs fonctions $x \mapsto u(x)$ interviendront et pour chacune des deux séries associées $\sum \overline{u}_n$ et $\sum \widetilde{u}_n$ on devra préciser

- soit sa divergence,
- soit sa convergence et alors on sera tenu de donner un majorant de sa somme.

Le logarithme utilisé est le logarithme népérien.

1. Développer le problème proposé avec $n_0 = 1$ pour $u(x) = \ln(x)$. On écrira $\overline{u}_n = \overline{\ln}_n$ et $\widetilde{u}_n = \widetilde{\ln}_n$
2. On pose maintenant $u(x) = \ln(\ln(x))$, $v(x) = u'(x)$ et $w(x) = u''(x)$.
   (a) Construire les graphes de u, $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)'$
   (b) Développer le problème proposé dans le préambule du problème avec $n_0 = 3$ pour :
      i. $\overline{w}_n$ et $\widetilde{w}_n$.
      ii. $\overline{v}_n$ et $\widetilde{v}_n$
      iii. $\overline{u}_n$ et $\widetilde{u}_n$