ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Seules les questions II.4 et II.5 utilisent les résultats obtenus dans la partie I.

Partie I

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Montrer que, pour tout k appartenant à $[\![0,n]\!]$, il existe un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, unique:

$$L_{k,n} = (-1)^{n-k}\frac{C_n^k}{n!}\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(X-i)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad L_{k,n}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq k \\ 1 & \text{si } i = k\end{cases}$$

(b) Montrer que $(L_{0,n}, L_{1,n}, \ldots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?
En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{n} L_{k,n} = 1$.
Déduire de cette égalité des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash[\![0,n]\!], \quad \frac{1}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x-k}$$

(c) Soit π la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_{0,n}, L_{1,n}, \dots, L_{n,n})$. On ne demande pas d'écrire π mais de donner :

- les éléments de la première ligne,
- la somme des éléments de toute autre ligne,
- la somme des éléments des différentes colonnes.

Ecrire la matrice π^{-1} inverse de π.

2. (a) Montrer que $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.
L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ, soit $\Delta(P)$ sera notée plus simplement ΔP dans la suite.
Montrer que l'application Δ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$. En déduire le noyau et l'image de Δ.

(c) On note Δ^0 l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \geqslant 1$, $\quad \Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1}$.
P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que sa décomposition sur la base $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ s'écrit:

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) L_{k,k}$$

3. (a) f désignant une fonction réelle de la variable réelle, on note désormais Δf la fonction définie pour tout x tel que $f(x+1)$ et $f(x)$ existent par $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et par récurrence, pour $i > 1$, $\Delta^i f = \Delta(\Delta^{i-1} f)$.On convient enfin que $\Delta^0 f = f$.
Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, n]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f(k) = P_f(k)$$

(b) Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![0, n-i]\!], \quad (\Delta^i f)(k) = (\Delta^i P_f)(k)$$

En déduire que :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k f)(0) L_{k,k}(n). \tag{1}$$

(c) a désignant un réel tel que $a > n$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$.
Montrer par récurrence que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad (\Delta^k f)(x) = \frac{k!}{(a-x)(a-1-x)\dots(a-k-x)}.$$

Ecrire la relation (1) pour f et en déduire que, si N est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel tel que $x \leqslant N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N(N-1)\dots(N-k)}{x(x-1)\dots(x-k)} = \frac{N(N-1)}{x(x-N+1)}$$

Partie II

Préliminaire :

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; montrer que la série $\sum P(X=n)u^n$ converge pour tout $u \in [0, 1]$.
L'application $u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)u^n$ de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de $X+Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y.

Dans cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule de cette urne et l'on s'intéresse au numéro marqué sur chaque boule tirée.
Pour tout entier n de $[\![1, N-1]\!]$, X_n désigne le nombre aléatoire de tirages nécessaires à l'obtention de $(n+1)$ numéros distincts, et l'on note

$$Y_1 = X_1 - 1, \quad Y_2 = X_2 - X_1, \dots, \quad Y_n = X_n - X_{n-1}.$$

On remarquera que :

$$P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = \cdots = P(Y_n = 0) = 0.$$

1. (a) Quelle est la probabilité que les k $(k \geqslant 2)$ premières boules tirées portent le même numéro ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_1.
   (c) Donner l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice de chacune des variables aléatoires Y_1 et X_1.

2. (a) Soit $(p, n, k) \in (\mathbb{N}^\times)^3$, tel que $p \geqslant n \geqslant 2$. Calculer la probabilité conditionnelle, sachant que $(X_{n-1} = p)$, de l'événement $(Y_n = k)$. Dépend-elle de p ?
   (b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n, son espérance mathématique, sa variance et sa fonction génératrice.

3. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice f_n de la variable aléatoire X_n.

4. (a) Montrer que, pour $x \geqslant N$:
$$f_n\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{N(N-1)\dots(N-n)}{x(x-1)\dots(x-n)}.$$
   (b) Utiliser le résultat de la question I.1.b pour montrer que :
$$f_n(u) = C_{N-1}^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k u}{1 - \frac{k}{N} u} \right)$$
   (c) En déduire, pour $i \in \mathbb{N}^\times$, la valeur de $P(X_n = i)$.
   Quelle remarque peut-on faire, â propos du résultat obtenu ?

5. (a) Trouver, en utilisant I.3.c, une expression simple de $\sum\limits_{n=1}^{N-1} f_n(u)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au p-ième tirage $(p \geqslant 2)$ un numéro non encore sorti ?
   (c) En déduire l'espérance mathématique du nombre aléatoire de numéros distincts sortis en n tirages $(n \geqslant 1)$ et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Etait-ce prévisible ?

6. On suppose dans cette question que N et n sont variables mais sont liés par la relation $N = \alpha(n+1)$ où α désigne un rationnel fixé, supérieur ou égal à 1.
   (a) Montrer que, si $\alpha > 1$, $\dfrac{E(X_n)}{n}$ et $\dfrac{V(X_n)}{n}$ admettent, quand n tend vers $+\infty$, des limites $\ell(\alpha)$ et $v(\alpha)$ que l'on précisera.
   Donner les limites L de $\ell(\alpha)$ et V de $v(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$ ainsi que des équivalents simples de $\ell(\alpha) - L$ et $v(\alpha) - V$.
   (b) Montrer que, si $\alpha = 1$, $\dfrac{E(X_n)}{n}$ et $\dfrac{V(X_n)}{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donner des équivalents de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. (on admettra que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$ est équivalent à $\ln n$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$).