# ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option économique**

# MATHEMATIQUES I

**Année 1983**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

I. On considère le système :

$$\begin{cases} x+b+c+d=0 \\ x^2+b^2+c^2+d^2=0 \\ x^3+b^3+c^3+d^3=0 \\ x^4+b^4+c^4+d^4=0 \end{cases}$$

(1) Résoudre ce système où $x$ est l'inconnue (complexe) et $b$, $c$, $d$ trois nombres complexes non nuls et deux à deux distincts.

(2) Résoudre ce système, considéré comme système d'équations à quatre inconnues (complexes).

II. Soit $E(x)$ la partie entière de $x$ donc le plus grand des entiers relatifs, inférieur ou égal à $x$.
On désigne par $f$ l'application définie par $f(x) = 2x - E(2x)$.

(1) Montrer que $f$ est périodique.

(2) On pose $g(x) = f(x + \frac{1}{6})$ et on désigne par $F$ et $G$ les graphes (courbes représentatives) de $f$ et $g$. Quelle transformation géométrique simple permet de déduire $G$ de $F$.

(3) Soit $\varphi$ la restriction de $f$ à $[0,1]$ et $\Phi$ sa représentation graphique.
$\widetilde{\varphi}$ la restriction de $g$ à $[0,1]\backslash\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $\widetilde{\Phi}$ sa représentation graphique.
Montrer que l'un de ces deux graphes présente un centre de symétrie.

(4) Calculer :

$$I = \int_0^1 \left(2x + 1 - E(2x + \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{1}{2} - E(3x + \frac{1}{2}\right) dx$$

III. Soit $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

(1) En donner au voisinage de 0 un développement en $x$ limité au second ordre.

(2) On pose $a_n = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{\cos(3(n+\frac{1}{2})+k)\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{3n+k}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Quelle est la nature de la série de terme général $a_n$ $(1 \leqslant n)$ ?

IV. Soit $S$ l'ensemble des racines complexes de $x^7 - 1$ donc $S$ est l'ensemble des sept racines septièmes de l'unité.

(1) A chaque $\alpha \in S$, on associe le trinôme $x^2 + \alpha x + \alpha^2$. On obtient ainsi sept trinômes. On désigne par $B(x)$ leur produit donc

$$B(x) = \prod_{\alpha \in} (x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

a. Montrer que l'application $\alpha \mapsto \alpha^3$ est une bijection de $S$.

b. Soit $\beta \in S$.

1. Montrer que l'application $\alpha \mapsto \dfrac{\alpha}{\beta}$ est une bijection de $S$.
2. Sachant que $\beta^2 x^2 + \alpha\beta x + \alpha^2 = \beta^2(x^2 + (\frac{\alpha}{\beta})x + \frac{\alpha^2}{\beta^2})$; comparer $B(x)$ et $B(\beta x)$.
3. Calculer $B(x)$

(2) On pose $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \sum_{\alpha \in S} \dfrac{\alpha^3}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$

a. Montrer que $A(x) = kA(\beta x)$

b. Expliciter $k$.

c. Montrer que $A(x)$ est réduit à la somme de deux termes $px^n + qx^{n+7}$ et préciser $n$.

d. En mettant $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ sous la forme

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{x^2 + x + 1} + \sum_{\alpha \in S \setminus \{1\}} \frac{\alpha^3}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$$

préciser les deux constantes $p$ et $q$.