ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on associe la suite $\Gamma_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$\Gamma_n = C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ ...,\ C_n^p, ...$$

définie pour $p \leqslant n$ par $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et pour $n < p$ par $C_n^p = 0$
(On pose $0! = 1$). Puis à toute suite Γ_n on associe les trois nombres α_n, β_n et γ_n définis par :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^{3k}, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^{3k+1}, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^{3k+2}$$

I. (1) En utilisant l'application $x \mapsto E(x) = \sup\{\mathbb{Z} \cap]-\infty, x]\}$ trouver les entiers minimums $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\beta}_n$ et $\widetilde{\gamma}_n$ tels que :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\widetilde{\alpha}_n} C_n^{3k}, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{\widetilde{\beta}_n} C_n^{3k+1}, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{\widetilde{\gamma}_n} C_n^{3k+2}$$

(2) On pose $a_n = 3\alpha_n - 2^n, \quad b_n = 3\beta_n - 2^n, \quad c_n = 3\gamma_n - 2^n.$
Donner sous forme d'un tableau où figurent uniquement des éléments de $\mathbb{N}$ la matrice m, de terme général $m_{n,k}$, de type $[8 \times 15]$, où n indice de ligne varie de 1 à 8 et k indice colonne varie de 1 à 15, défini par :

$$\begin{array}{rcl} n & \leqslant & 8 \quad \text{et} \quad k \leqslant 8 \mapsto m_{n,k} = C_n^k \qquad \text{sinon} \\ m_{n,9} & = & 2^n \qquad m_{n,10} = \alpha_n \qquad m_{n,11} = \gamma_n \qquad m_{n,12} = \gamma_n \\ m_{n,13} & = & a_n, \qquad m_{n,14} = b_n \qquad m_{n,15} = c_n \end{array}$$

(3) En admettant provisoirement que les suites a, b et c sont périodiques, préciser les périodes et prévoire les valeurs de α_{34}, β_{36} et γ_{42}.

(4) Les suites a, b et c sont-elles linéairement indépendantes ?

(5) Les suites α, β et γ sont-elles linéairement indépendantes ?

(6) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Pour $0 \leqslant n$ expliciter 2^n d'une part et $(1+j)^n$ d'autre part comme combinaison linéaire de α_n, β_n et γ_n; les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des nombres complexes indépendants de n.

b. Montrer que les suite $n \mapsto 2^n$ et $n \mapsto (1+j)^n$ vérifient une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+3} = pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n$$

où $0 \leqslant n$ et p, q, r sont trois constantes réelles indépendantes de n; préciser ces constantes.

c. α, β et γ vérifient-elle la même relation ?

d. Expliciter α_n, β_n et γ_n (chacun des nombres α_n, β_n et γ_n sera exprimer sous forme d'une somme de deux nombres réels)

II. On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^0 = I$$

(1) Montrer que M^4 appartient à l'espace vectoriel engendré par M^3, M^2 et M.

(2) Soient α', β' et γ' trois suites définies par

$$\begin{pmatrix} \alpha'_n \\ \beta'_n \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \beta'_0 \\ \gamma'_0 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0) \in \mathbb{R}^3$ est donné).
Montrer que ces suites vérifient une relation de récurrence linéaire de la forme

$$u'_{n+3} = p'u'_{n+2} + q'u'_{n+1} + r'u'_n$$

où $0 \leqslant n$ et $(p', q', r') \in \mathbb{R}^3$ est indépendant de n. Expliciter (p', q', r').

(3) Expliciter la matrice H^{-1} inverse de la matrice H.

(4) Déterminer $(p'', q'', r'') \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$MH \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix}$$

(5) Expliciter la matrice P carrée d'ordre 3 telle que pour $0 \leqslant n$ on ait :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6) Expliciter pour $0 \leqslant n$ la matrice P^n et pour $0 \leqslant n-3$ les matrices $P^{n-3}H$ et $P^{n-3}H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$