ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires considérées dans le problème sont définies sur le même espace probabilisé. On rappelle que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, les deux variables aléatoires $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$ et X_n sont, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, indépendantes.

X désignant une variable aléatoire discrète finie, $(x_1, x_2, ..., x_k)$ la suite finie <u>strictement croissante</u> des valeurs prise par X avec une probabilité non nulle, $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2), ..., p_k = P(X = x_k)$, les probabilités attachées à chacune de ces valeurs, on note φ_X la fonction <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \qquad \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\log\left[\sum_{i=1}^{k} p_i e^{x_i t}\right]$$

On rappelle enfin que la variable aléatoire X est dite <u>non certaine</u> si $k \geqslant 2$ et qu'alors sa variance est non nulle.

I. <u>Exemple</u> : Soit Z la variable aléatoire discrète telle que $P(Z = -1) = P(Z = +1) = \dfrac{1}{2}$.

(1) Ecrire $\varphi_Z(t)$ pour $t \neq 0$ et déterminer $\varphi_Z(0)$.

(2) Montrer que φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer $\varphi'_Z(0)$ et $\varphi'_Z(t)$ pour $t \neq 0$.

(3) Etudier les variations de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2\varphi'_Z(t) \end{array}$

En déduire les variations de φ_Z. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_Z(t)$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_Z(t)$.

Tracer la courbe représentative de φ_Z.

II. <u>Cas général : X variable aléatoire discrète finie non certaine.</u>

(1) Déterminer $\varphi_Z(0)$ et le développement limité à l'ordre 1 à l'origine de φ_X en fonction de l'espérance mathématique $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X. φ_X est-elle dérivable à l'origine ?

(2) a. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{R}^\times, \quad \forall \alpha \in]0,1[, \quad z^\alpha \leqslant 1 + \alpha(z-1) \qquad (1)$$

(On pourra par exemple, utiliser la formule de Taylor). Dans quel cas a-t-on égalité ?

b. Soient t_1 et t_2 deux nombres réels tels que $0 < t_1 < t_2$. On pose $\alpha = \dfrac{t_1}{t_2}$ et $z_i = e^{t_2[x_i - \varphi_X(t_2)]}$. Ecrire l'inégalité (1) pour tout z_i ($i \in \{1, 2, .., k\}$) pour démontrer que $\varphi_X(t_1) < \varphi_X(t_2)$.

c. Etudier les variations de φ_X sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser φ_{-X})

(3) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_X(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_X(t)$. Tracer la courbe représentative de φ_X.

III. Etude de l'application : $X \mapsto \varphi_X$

(1) $a \in \mathbb{R}^\times$, comparer φ_{X+a} et φ_{aX} à φ_X.

(2) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies, indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

(3) a. Démontrer, par récurrence sur n, que, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels, la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = e^{\alpha_n t}$, est libre.

b. En déduire que, si X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes finies : $\varphi_X = \varphi_Y$ si et seulement si X et Y ont même loi de probabilité.

(4) Caractériser les variables aléatoires X telles que φ_X soit impaire.

(5) Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad e^{at} P(X \geqslant a) \leqslant e^{t\varphi_X(t)}$$

(6) Démontrer que la fonction φ_{U_N} associée à la variable aléatoire discrète uniforme U_N définie par :

$$P(U_N = 0) = P(U_N = 1) = \cdots = P(U_N = N-1) = \frac{1}{N} \qquad (N \geqslant 1)$$

est telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \quad \varphi_{U_N}(t) = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{t}\log\left[\frac{\operatorname{sh}\dfrac{Nt}{2}}{N\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}}\right]$$

Retrouver ainsi $E(U_N)$ et $V(U_N)$.
Ecrire $\varphi_{a+U_N(t)}$ pour a et t réels et r réel non nul.

IV. Dans ce paragraphe, on donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$, qui sauf au IV. 4) suivent la même loi de probababilité que la variable Z définie au I, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ de nombres réels strictement positifs. On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$Y_n = u_1X_1 + u_2X_2 + \cdots + u_nX_n$$

(1) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n = 1$

a. Montrer, en utilisant III.5), que :

$$\forall a > 0, \quad P(|Y_n| \geqslant a) \leqslant 2M_n(a)$$

où $M_n(a) = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \left[e^{-at}(\operatorname{ch} t)^n\right]$

b. Etudier les variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(t) = e^{-at}(\operatorname{ch} t)^n$$

En déduire la valeur de $M_n(a)$ (on distinguera les trois cas $n < a$, $n = a$, $n > a$).
Vérifier par un calcul direct que, si $n \leqslant a$, on a : $P(|Y_n| \geqslant a) = 2M_n(a)$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n(a)$ et déterminer un équivalent de $M_n(a) - \lim\limits_{n\to+\infty} M_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

(2) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \dfrac{1}{2^n}$

a. Démontrer que, si $t \neq 0$: $\varphi_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{t} \log \left[\dfrac{\operatorname{sh} t}{2^n \operatorname{sh} \dfrac{t}{2^n}} \right]$

b. En déduire que l'ensemble des valeurs prises par Y_n est

$$\left\{ \pm \frac{2k-1}{2^n} \qquad k \in \{1, 2, .., 2^{n-1}\right\}$$

et donner la probabilité attachée à chacune de ces valeurs (comparer $\varphi_{Y_n}(t)$ et $\varphi_{a+U_N}(t)$ obtenue au III.6)

Revenant à la définition de φ_{Y_n}, démontrer que :

$$\frac{\operatorname{sh} t}{2^n \operatorname{sh} \dfrac{t}{2^n}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \operatorname{ch} \left(\frac{2k-1}{2^n} t \right)$$

c. Déterminer, pour tout t réel, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_{Y_n}(t)$.

d. Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire discrète finie T telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_Y(t) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_{Y_n}(t)$$

(3) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ quelconque.
Montrer que la suite $(\varphi_{Y_n}(t))$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (u_n)^2$ converge.

(4) On suppose que, les notations restant celles du IV, les variables aléatoires indépendantes X_n suivent désormais la même loi qu'une variable aléatoire discrète finie non certaine X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et qu'enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démontrer que :

a. Si $E(X) \neq 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

b. Si $E(X) = 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (u_n)^2$ converge.

c. Dans le cas où, quel que soit $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$, la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \left[\frac{1}{n} \varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) + E(X) \log \frac{n-1}{n} \right]$$

converge. En déduire que la suite $(\varphi_{Y_n}(t) - E(X) \log n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ converge pour tout t réel.