ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les parties III et IV, indépendantes entre elles, proposent deux autres démonstrations de la formule (3) de II-4-b.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur à 1, et l'on note, pour tout entier $p \leqslant n$, $I_p = \{0, 1, 2, ..., p\}$.

Question préliminaire :$(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(a, b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$.

a) Déterminer, lorsque $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^\times$, une relation de récurrence entre $I(a, b)$ et $I(a+1, b-1)$.
En déduire $I(a, b)$, $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer une expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{j=0}^{b} (-1)^j \frac{C_b^j}{a+j+1}$$

Partie I

1. $\mathbb{R}_n[X]$ désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \tag{1}$$

et que l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même : $f : P \mapsto Q$ (Q défini par la relation (1)) est linéaire.

2. Montrer que f est bijective et définir l'application réciproque f^{-1}.

3. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la matrice A^{-1} inverse de A. Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

4. (a) Soit α une racine complexe d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'ordre de multiplicité k .
   Est-elle racine du polynôme $f^{-1}(Q)$ et si oui, avec quel ordre de multiplicité (discuter en fonction des valeurs de $k \in \mathbb{N}^{\times}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$) ?
   (b) En déduire les sous-espaces propres de f^{-1} et montrer qu'ils sont également propres pour f.
   (c) Déterminer la matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 1 et la matrice D diagonale telles que
$$D = T^{-1}AT$$
   Déterminer la matrice T^{-1} inverse de T.

5. k désignant un entier naturel, f^k désignant l'application $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ si $k \geqslant 1$, et f^0 l'application identique, montrer que le coefficient de X^p, $p \in I_n$, du polynôme $f^k(X^n)$ est égal à :
$$C_n^p \left[\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j \frac{1}{(p+j+1)^k} \right]$$

Partie II

On s'intéresse désormais à la suite d'épreuves définies de la façon suivante

<1> La première épreuve consiste à “tirer” un nombre “au hasard” dans I_n.

<2> Si le nombre p a été obtenu à la k-ième épreuve ($k \geqslant 1$), la $(k+1)$-ième épreuve consiste à “tirer au hasard” un nombre dans I_p.

Compte-tenu des hypothèses <1> et <2>, on conviendra que le nombre n est le résultat de la 0-ième épreuve.
Si $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$, on note $P_k(p)$ la probabilité d'obtenir le nombre p au k-ième tirage, et U_k la matrice colonne
$$\begin{pmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \\ \vdots \\ P_k(n) \end{pmatrix}.$$

Enfin X_k désigne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire : “nombre obtenu au k-ième tirage”

1. (a) En remarquant que le résultat de la $(k+1)$-ième épreuve est conditionné par celui de la k-ième, exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in I_n$, $P_{k+1}(p)$ en fonction des nombres $P_k(i)$, $i \in I_n$.
   (b) En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k \tag{2}$$

2. (a) Ecrire la matrice uniligne B telle que $BU_k = E(X_k)$, espérance mathématique de la variable aléatoire X_k, constater que le produit BA s'exprime simplement en fonction de B, et déduire de la relation (2), une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$.
   Calculer $E(X_k)$.
   (b) Procéder de façon analogue pour déterminer $E(X_k^2)$ (introduire la suite $(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$).
   En déduire $V(X_k)$, variance de X_k.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit G_k le polynôme $G_k = \sum\limits_{p=0}^{n} P_k(p) X^p$.

   Exprimer, à l'aide de l'application f définie dans la partie I, G_k en fonction de X^n. En déduire $P_k(p)$ pour $(k, p) \in \mathbb{N} \times I_n$.

4. (a) Montrer que, si $p \in I_n \backslash \{0\}$, la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^\times} P_k(p)$ converge.

   La série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^\times} P_k(0)$ est-elle convergente ?

   (b) Utiliser le résultat (0) de la question préliminaire pour démontrer que :

$$\forall p \in I_n \backslash \{0\}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(p) = \frac{1}{p} \tag{3}$$

Partie III

1. En envisageant les différents résultats de la k-ième épreuve, montrer que, si $p \in I_{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$, la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre p au $(k+1)$-ième tirage est égale à $P_{k+1}(p+1)$.

2. Si $p \in I_n$, on note $\alpha(p, n)$ la probabilité de tirer au moins une fois le nombre p lorsque les tirages "se prolongent indéfiniment", le premier tirage s'effectuant dans I_n.

   (a) Que vaut $\alpha(n, n)$?

   (b) Démontrer, en tenant compte du résultat obtenu au premier tirage, que :

$$\forall p \in I_{n-1}, \qquad (n+1)\alpha(p, n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p, k)$$

   En déduire $\alpha(n-1, n)$.

   (c) Si $p \in I_{n-2}$, trouver une relation entre $\alpha(p, n)$ et $\alpha(p, n-1)$. En déduire $\alpha(p, n)$.

3. Utiliser les résultats obtenus aux questions III.1 et III.2 pour retrouver la formule (3).

Partie IV

1. Soit d l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même définie par $d(P) = P'$ (P' dérivée du polynôme P).

   Montrer que $d \circ f = f \circ d - f \circ d \circ f$ (considérer $f^{-1} \circ d \circ f$)

2. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^\times, \quad f \circ d = \sum\limits_{k=1}^{q} d \circ f^k + f \circ d \circ f^q$.

3. Déduire du calcul de $(f \circ d)(X^n)$ que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^\times, \quad X^n = (X-1)(\sum_{k=1}^{q} G'_k) + G_q \tag{4}$$

4. Utiliser (4) pour retrouver la formule (3).