ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans ce problème, on désigne par T l'ensemble des suites $t : \mathbb{N}^{\times} \to \{0, 1, 2\}$ donc des suites de terme général $t_n \in \{0, 1, 2\}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, ...$ et par D l'ensemble des suites de $\mathbb{N}^{\times} \to \{0, 1\}$ donc des suites de terme général $d_n \in \{0, 1\}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, ...$ Soient σ et σ' les applications les applications numériques définies sur T et D par

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{3^k} \qquad \text{et} \qquad \sigma'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{2^k}$$

Sous des notations usuelles :

- $\operatorname{Im} t \subset \{0, 1, 2\}$ représente l'ensemble des images par t donc les $t \ln$,
- $t^{-1}(\{1\})$ représente l'ensemble des entiers d'image 1 par t,
- $\inf f^{-1}(\{1\})$ représente le premier entier n_0 tel que $t_{n_0} = 1$

Soit v l'application $v : T \mapsto D$ qui à $t \in T$ associe $d \in D$ de la manière suivante :

1. Si $1 \notin \operatorname{Im} t$, alors si $t_n = 0$, on pose $d_n = 0$ et $t_n = 2$ on pose $d_n = 1$
2. Sinon soit $n_0 = \inf f^{-1}(\{1\})$,
   pour $p < n_0$, d_p est défini comme ci-dessus,
   pour $p = n_0$, on pose $d_{n_0} = 1$
   pour $n_0 < p$, on pose $d_p = 0$

I. Soient enfin t et t' deux suites de T. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^{\times}$ pour lequel on ait $t_{n_0} < t'_{n_0}$ alors pour $p < n_0$, on a $t_p = t'_p$ on dit que t est inférieur à t' et on note $t < t'$.

(1) Montrer que pour $t \neq t'$, la relation " $t < t'$ ou $t' < t$ " est vraie.
($t \leqslant t'$ est définie par $t < t'$ ou $t = t'$)

(2) Montrer que si on a $t \leqslant t'$, alors on a $\sigma(t) \leqslant \sigma(t')$.

(3) Soit n_0 introduit ci-dessus dans la définition $t < t'$. Montrer que $t_{n_0} = 0$ et t'_{n_0} impliquent $\sigma(t) < \sigma(t')$.

(4) On suppose maintenant $t < t'$ avec $t_{n_0} = 1 = t'_{n_0}$. Peut-on avoir $\sigma(t) = \sigma(t')$?

II. A $x \in [0, 1[$, on associe deux suites $t \in T$ et r de la manière suivante :
On pose $r_1 = x$, sinon les termes généraux t_n et r_n de ces suites sont définis par récurrence par $r_n = \dfrac{1}{3^n} t_n + r_n$ et $0 < r_n < \dfrac{1}{3^n}$. On pose $u(x) = t$

(1) Montrer que l'application u est définie sur $[0, 1[$.

(2) u est-elle injective ?

(3) u est-elle surjective ?

(4) Que dire des applications $\sigma \circ u$ et $u \circ \sigma$?

(5) $t' \in T$ étant donné, résoudre en $t \in T$ l'équation $(u \circ \sigma)(t) = t'$.

(6) Montrer que l'application $w = \sigma' \circ v \circ u$ est croissante.

(7) Expliciter $w^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $w^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$, $w^{-1}(\{\frac{7}{8}\})$.

III. Dans cette partie du problème, il sera toujours préférable de remplacer une explication confuse par un dessin clair.
Soit f une fonction affine définie sur $[a, b]$ où $a < b$. Il existe donc deux constantes p et q telles que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $f(x) = px + q$.

(1) Montrer que si l'on connait les images a' et b' de a et b par f alors on peut déterminer p et q, donc f est connue.

(2) On pose $b - a = l$, $a_0 = a$, $a_1 = a + \dfrac{l}{3}$, $a_2 = a + \dfrac{2l}{3}$, $a_3 = b$ et on définit l'application continue g affine sur $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$ et $[a_2, b]$, donc "affine par morceaux" par

$$g(a) = f(a), \qquad g(a_1) = g(a_2) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad g(b) = f(b)$$

Montrer que la représentation graphique de g est une ligne polygonale de trois côtés. On appelle palier horizontal ou palier celui pour lequel $g'(x) = 0$. On appelle oblique les deux autres côtés. Donner les longueurs du palier et celle de chaque oblique.

IV. On pose $\tau(f) = g$ et on se propose d'étendre τ aux fonctions affines par morceaux. On appelle application caractéristique toute application définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'image a au plus deux éléments 0 et 1. Si h est une telle fonction et si $A = h^{-1}(\{1\})$ est l'ensemble des éléments dont l'image par h vaut 1 on note χ_A cette application.
Soit une suite finie $a_0 = a, a_1, a_2, a_3, ..., a_n = b$ strictement croissante (donc pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ on a $a_k < a_{k+1}$). On pose

$$\Delta = [a, b] \backslash \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$$

et on considère l'application k restriction à Δ de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k \chi_{[a_k, a_{k+1}]}$ où pour tout $k \in \{0, 1, 2, .., n-1\}$ on a $p_k \neq p_{k+1}$.

(1) Montrer qu'il existe une seule fonction g continue affine par morceaux dont on connait l'image y_0 en un point $x_0 \in [a, b]$ et dont la dérivée g' sur Δ est k.

(2) Soit $g_0, g_1, ..., g_{n-1}$ les fonctions affines restriction de g à $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, .., $[a_{n-1}, b]$ on définit $\tau(g)$ par ses restrictions :

$$\tau(g_0), \tau(g_1), ..., \tau(g_{n-1}).$$

a. Montrer que $\tau(g)$ a pour représentation graphique une ligne polygonale : en donner le nombre de paliers et le nombre d'obliques.

b. Soit k la fonction périodique de période 2 définie sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à $[-1,1]$ est définie par $k(x) = |x|$. On désigne par k_1 et k_2 les restrictions de k à $[0,2]$ et $[0, \frac{3}{2}]$. Construire $\tau(k_1)$ et $\tau(k_2)$. Montrer que $\tau(k_2)$ n'est pas la restriction à $[0, \frac{3}{2}]$ de $\tau(k_1)$.

V. Dans la suite f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$, on pose $f_1 = \tau(f)$, $f_2 = \tau(f_1), ..., f_n = \tau(f_{n-1})$.

(1) Montrer que la représentation graphique de f_n est une ligne polygonale T_n.

(2) Quelle est la somme k_n des longueurs de paliers de T_n ?

(3) Quelle est la somme Θ_n des longueurs des obliques de T_n ?

(4) Quelle est la longueur $l_n = k_n + \Theta_n$ de T_n ?

(5) Calculer $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

(6) Donner les limites des suites k_n, Θ_n et l_n.

VI. On appelle suite stationnaire toute suite constante à partir d'un certain rang. Pour $x_0 \in [0,1]$, on considère la suite numérique de terme général $f_n(x_0)$ et on désigne par $S \subset [0,1]$ l'ensemble des éléments de $[0,1]$ pour lesquels cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

(1) Préciser S.

(2) Montrer que pour $x_0 \in [0,1] \backslash S$, la suite $f_n(x_0)$ est telle que pour tout n on a $f_n(x_0) \neq f_{n+1}(x_0)$ et montrer que cette suite converge.

VII. Pour $x \in [0,1]$, on définit ψ par $\psi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$; $\psi'_d(x)$ et $\psi'_g(x)$ désignent, quand elles existent, les dérivées à droite et à gauche de ψ en x pour $x \in [0,1[$ ou $x \in]0,1]$. (Rappelons que pour $x_0 \in [0,1[$ par $\psi'_d(x_0)$ est, si elle existe, la limite de $\dfrac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures).

(1) Etudier l'application $w - \psi$.

(2) Montrer que ψ est continue.

(3) Montrer que ψ est intégrable et calculer $\int\limits_0^1 \psi(x)dx$.

(4) ψ'_d est-elle définie en tout point de $[0,1[$?

(5) ψ'_g est-elle définie en tout point de $]0,1]$?

(6) Préciser la partie P de $[0,1[$ où ψ'_d n'est pas définie.