ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations :

E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}[X]$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n , on note e_n la fonction polynôme définie par $e_n(x) = x^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
A toute fonction f élément de E , on associe la fonction Φ définie, pour tout x réel, par :

$$\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Le problème propose l'étude de quelques propriétés de l'application $f \mapsto \Phi$.
Les parties III, IV, V, indépendantes entre elles, utilisent des résultats de la partie II, que l'on pourra, éventuellement, admettre.

Partie I :Etude de trois exemples

Déterminer les fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3 associées respectivement à f_1, f_2, f_3 définies par :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x\cos(2\pi x)$

2.
$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 4x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
Tracer la courbe représentative de Φ_2. Φ_2 est-elle indéfiniment dérivable?

3.
$$f_3(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\Phi_3(x) - f_3(x))$

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des coordonnées du point de la courbe représentative de Φ_3 , à tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Tracer les courbes représentatives de f_3 et Φ_3 dans un même repère.

Partie II :Etude de l'application de E vers E : $L \ : f \mapsto \Phi$

1. (a) f appartenant à E , dire pourquoi Φ est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que l'application L de E vers E définie par $L(f) = \Phi$ est linéaire. Est-elle surjective ?
   (c) Soit α un réel strictement positif. Calculer Φ si f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\alpha x)$
   L est-elle injective ?

2. (a) Montrer que, si f est bornée, $L(f)$ est bornée
   (b) Montrer que, si f est périodique, $\Phi = L(f)$ l'est également.
   (c) Soient : $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $\Phi = L(f)$, g définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(a-x), \quad \gamma = L(g).$$
   Trouver un lien entre γ et Φ.
   En déduire un élément de symétrie de la courbe représentative de Φ lorsque f est paire (respectivement impaire).
   Donner une condition suffisante sur f pour que Φ soit paire (respectivement impaire).

3. (a) Montrer que, si f admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), $L(f)$ possède la même limite.
   Y a-t-il réciproque? Donner un contre-exemple.
   (b) On suppose l'existence d'un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et d'une fonction numérique ε tels que, pour $x \neq 0$:
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$$
   (le symbole ∞ représentant indifféremment $+\infty$ ou $-\infty$.
   Montrer qu'il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera en fonction de (a,b,c) et une fonction numérique ε' tels que :
   $$\Phi(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon'(x) = 0$$

Partie III : Etude d'un exemple

$\sqrt[3]{A}$ désigne, dans ce qui suit, le nombre réel unique, éventuellement négatif, dont le cube vaut A.
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)}$

1. Etudier la fonction f (continuité, dérivabilité, variations, limites).
   Tracer sa courbe représentative (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

2. Etudier la fonction $\Phi = L(f)$ associée, sans chercher à l'expliciter.
   Ecrire en Pascal un programme donnant des valeurs approchées du minimum et du maximum relatifs de Φ (on pourra utiliser la méthode des rectangles en divisant l'intervalle d'intégration en 10 parties égales; on trouve 0.358 et 0.425).
   Tracer la courbe représentative de Φ (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

Partie IV : Etude des valeurs propres de L

Un nombre réel λ est dit valeur propre de L s'il existe une fonction non nulle f de E , appelée fonction propre de L associée à la valeur propre λ telle que $L(f) = \lambda f$.
λ désignant une valeur propre de L , on note

$$E_\lambda = \{f \in E \text{ tel que } L(f) = \lambda f\}.$$

1. (a) Montrer que,pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par L ainsi que $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Ecrire la matrice A_n de la restriction ℓ_n de L à $\mathbb{R}_n[X]$ rapporté à la base $(e_0, e_1, , \ldots, e_n)$.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de ℓ_n. ℓ_n est-elle diagonalisable?
2. (a) 0 est-il valeur propre de L ?
   (b) Montrer que, si $f \in E$ est une fonction propre associée à une valeur propre non nulle λ, elle est indéfiniment dérivable et que ses dérivées successives appartiennent à E_λ.
3. (a) Montrer que $\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\omega x}$ est une fonction propre pour L et déterminer la valeur propre $\lambda(\omega)$ associée.
   (b) Etudier les variations de la fonction λ définie sur $\mathbb{R}$ par $\omega \mapsto \lambda(\omega)$.
   Cette fonction est-elle dérivable en 0?
   (c) En déduire que tout réel positif est valeur propre de L.
4. Montrer que toute fonction propre, associée à une valeur propre supérieure à 1, est non bornée (utiliser II-2-a).

Partie V : Cas où f, élément de E, est la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X

1. Exprimer $\Phi = L(f)$ en fonction de F fonction de répartition de l'aléa X.
   Montrer que Φ est la densité d'une variable aléatoire Y
   (on vérifiera en particulier, en utilisant II-3-a que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \Phi(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} \Phi(t)dt$ convergent).
2. On suppose f nulle en dehors d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$.
   Calculer, pour tout entier naturel n , $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k\in[\![0,n]\!]}$.
   En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que l'expression de $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenue à la question précédente, est toujours valable si l'on suppose uniquement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n)$ existe.