ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

La partie II, largement indépendantes de I, peut être abordée en admettant, au besoin, des résultats fournis par l'énoncé.

Question préliminaire

1. Calculer, en posant $t = \dfrac{1}{x}\tan u$, $\quad I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$

2. (a) Calculer, en posant $v = \cos u$, $\quad I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$

   (b) En déduire que, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures : $I_2(x) \sim -\ln x$.
   Ces deux intégrales interviennent dans les questions qui suivent.

Partie I : Etude de l'application f de $\mathbb{R}_+^\times$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u du}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$

1. (a) Calculer $f(1)$.

   (b) Montrer que $f(x) + f(\dfrac{1}{x})$ est indépendant de x élément de $\mathbb{R}_+$ et donner sa valeur (on pourra poser $u = \dfrac{\pi}{2} - v$ dans l'intégrale donnant $f(\dfrac{1}{x})$).

2. Détermination de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

   (a) Montrer que, pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\quad u \leqslant \frac{\pi}{2} \sin u$

   (b) En déduire une majoration de $f(x)$ pour $x < 1$, puis $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. <u>Dérivabilité de f</u>

   (a) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$\phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{udu}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$$

   x désignant un réel strictement positif, h un réel tel que $0 < |h| < \dfrac{x}{2}$, on pose :

$$A = x\cos^2 u + \sin^2 u \qquad B = h\cos^2 u$$

   Utiliser la relation $\dfrac{1}{A+B} = \dfrac{1}{A} - \dfrac{B}{A^2} + \dfrac{B^2}{A^2(A+B)}$ pour démontrer que :

$$\left| \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^2 udu}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2} \right| \leqslant |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 udu}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

   En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et que $f'(x) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{u(x^2\cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2} du$

   (c) Quelle est la dérivée de la fonction ψ telle que $\psi(u) = \dfrac{\sin u \cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$?

   En déduire $f'(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(u)du$.

   (d) Calculer $f'(1)$, puis $f'(x)$ pour $x \neq 1$ en utilisant une primitive de ψ.
   f' est-elle continue en 1 ?

4. <u>Autre expression de f</u>

   (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

   (considérer $\int\limits_y^x \dfrac{\ln t}{t^2-1} dt$ avec $0 < y < x$).

   (b) Dresser le tableau de variation et construire la courbe représentative de f.

Partie II : Démonstration de la formule : $\pi^2 = 10 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$ (2)

1. <u>Calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.</u>

(a) Montrer l'existence d'une fonction g unique continue sur $[0,1]$ telle que :

$$\forall t \in]0,1[, \qquad g(t) = \frac{t\ln t}{t^2-1}$$

(donner $g(0)$ et $g(1)$).

(b) Démontrer, en utilisant l'expression de f obtenue au I-4-a que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(1) = -\sum_{p=0}^{n} \int_0^1 t^{2p} \ln t dt + \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt$$

(c) Calculer $\int_0^1 t^{2p} \ln t dt$, p désignant un entier naturel.

(d) Déduire de II-1-a l'existence d'une constante K telle que :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt \leqslant \frac{K}{2n+2}$$

(e) En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donner la valeur de sa somme.

2. (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge et calculer sa somme.

(b) En déduire la formule (2) (on pourra considérer $\frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$)

3. Détermination d'une valeur approchée de π^2

Soit pour $x \in \mathbb{R}_+^\times$,

$$h(x) = \frac{2}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

et pour $p \in \mathbb{N}^\times$,

$$s_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}.$$

(a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^\times, \quad \int_{p+1}^{+\infty} h(x)dx \leqslant r_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(x)dx,$$

puis en encadrant $h(x)$ que :

$$\frac{1}{6(p+2)^3} \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{6p^3}$$

(b) Calculer une valeur approchée de s_6 à 10^{-4} près. En déduire une valeur approchée de π^2 à 5.10^{-4} près.

(c) Donner l'ordre de grandeur de la valeur de p à utiliser pour obtenir par la méthode précédente une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.

Partie III : Accélération de la convergence

Les candidats qui le désirent peuvent aborder directement la question III- 4 qui rappelle les résultats théoriques obtenus aux questions III -1 ,2 et 3.

1. Démontrer que, pour tout couple (n, q) d'entiers naturels :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=0}^{q} \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} + \frac{2^{q+1}(q+1)!}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2q+3)}$$

(on pourra procéder par récurrence).

2. Calcul de $v_k = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)}$ pour $(k,p) \in \mathbb{N}^2$.

   (a) En remarquant que :

$$\frac{2(k\ +1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2k+3)}$$

   simplifier, pour $N \geqslant p$:

$$\sum_{n=p}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)}$$

   (b) En déduire l'existence et la valeur de v_k.

3. Application à la détermination d'une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$

   (a) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{\times} \times \mathbb{N} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{p} v_k + R_q$$

   avec

$$R_q = 2^{q+1}(q+1)! \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2q+3)}.$$

   (b) En majorant, pour $n \geqslant p$, $\frac{1}{(2n+1)^2}$ par $\frac{1}{(2p+1)(2n+1)}$, démontrer que :

$$0 \leqslant R_q \leqslant 2W_q \quad \text{avec} \quad W_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q.$$

   (c) En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + W_q$$

   est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

4. Détermination d'une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près

(a) Imaginer un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près, par la méthode précédente, ainsi que le plus petit entier q nécessaire à cette obtention, p étant considéré comme paramètre.
On rappelle à cet effet que :

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^{q} v_k + W_q \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ll} v_k = & \dfrac{2^{k-1}k!}{k+1} \cdot \dfrac{1}{(2p+1)(2p+3)\dots(2p+2k+1)} \\ W_q = & \dfrac{q+1}{2p+1} v_q \end{array} \right.$$

est une valeur approchée de $\dfrac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

(b) Utiliser cet algorithme dans les trois cas suivants : $p = 5$; $p = 10$; $p = 15$. On donnera dans chaque cas la valeur approchée de π^2 obtenue (avec toutes les décimales fournies par la machine) et la valeur de q ayant servi à l'obtenir.