ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale et économique

MATHEMATIQUES II

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules numérotées $1, 2, 3, ..., n$. On y effectue une suite de tirages avec remise, ce qui signifie qu'à chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Soit X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été obtenue au moins une fois.
L'objet du problème est l'étude de la variable aléatoire X_n (**partie I**) et du comportement asymptotique de son espérance.

Partie I

On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on considère l'événement B_i défini par : "la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages".

1. *Etude de la variable aléatoire* X_2
   Dans cette question, on suppose que $n = 2$, ce qui revient à supposer que l'urne ne contient que 2 boules numérotées 1 et 2.

   (a) Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$. Calculer les sommes suivantes :
   $S_p(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^p$ et $\sum_p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + px^{p-1}$
   Déterminer leurs limites respectives $S(x)$ et $\sum(x)$ quand p tend vers l'infini.

   (b) Calculer $P(X_2 = p)$. En déduire l'espérance de X_2.

2. *Etude de la variable aléatoire* X_3
   Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

(a) On rappelle la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

À l'aide de celle-ci, établir une formule analogue donnant la probabilité de la réunion $A \cup B \cup C$ de trois événements A, B et C.

(b) Soient i, j, k trois entiers distinct appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Calculer $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$, $P(B_i \cap B_j \cap B_k)$ et en déduire $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

(c) Exprimer $P(X_3 > p)$ à l'aide de $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ et en déduire $P(X_3 = p)$.

(d) Calculer l'espérance de X_3 (que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible).

3. *Etude de la variable aléatoire* X_n
Dans cette question, on revient au cas général.

(a) Calculer, en fonction de n et p les probabilités $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$. De façon générale, si $i_1, i_2, ..., i_k$ sont k entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, calculer en fonction de n, p et k la probabilité de l'intersection $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap ... \cap B_{i_k}$.

(b) En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré (ou du crible), la probabilité de la réunion $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$

(c) Que vaut $P(X_n > p)$? En déduire que :

$$P(X_n = p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})^{p-1}$$

(d) En déduire l'identité suivante pour tout entier q tel que $0 \leqslant q < n$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k^q = 0$$

4. *Calcul de l'espérance* $E(X_n)$
On pose désormais : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

(a) Établir pour tout réel x de $[0; 1]$ la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 - x)^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} x^{k-1}$$

et en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$$

(b) Déduire des résultats précédents que l'on a : $E(X_n) = nH_n$

(c) Écrire un algorithme en PASCAL de calcul de $E(X_n)$, et en déduire des valeurs décimales approchées de $E(X_n)$ pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$ (on donnera ces valeurs avec les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

Partie II

Dans cette partie, H_n est le nombre défini en I.4

1. *Etude de* $H_n - \ln(n)$

(a) À l'aide du théorème des accroissements finis, prouver que l'on a pour tout réel strictement positif x :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

(b) On considère les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = H_n - \ln(n) \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

Étudier leur sens de variation et montrer qu'elles sont convergentes vers une limite commune que l'on notera γ.

(c) Montrer que $u_n - \frac{1}{n} \leqslant \gamma \leqslant u_n$, et en déduire comment il suffit de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de γ à $0,0001$.

2. *Etude d'une fonction auxiliaire*
Dans cette question, x désigne un réel positif, et l'on pose :

$$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x)$$

(a) Calculer F' et montrer que : $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{x^3}{6}$

(b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de F en 0. En déduire le plus petit nombre réel positif k tel que l'on ait pour tout x positif : $F(x) \leqslant kx^3$

3. *Étude asymptotique de H_n*
On considère la suite définie pour $n \geqslant 1$ par : $w_n = H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}$

(a) Soit p un entier strictement supérieur à n. Calculer la somme des termes $w_{k+1} - w_k$ pour $n+1 \leqslant k \leqslant p$, et en déduire l'existence et la valeur de :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k)$$

(b) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $F(\frac{1}{k})$. Par comparaison d'une série à une intégrale, en déduire que :

$$0 \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

(c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir :

$$0 \leqslant \quad \gamma - (H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n}) \leqslant 0,0001$$

Calculer la valeur approchée de γ ainsi obtenue, que l'on donnera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

4. *Conclusion*
Démontrer qu'il existe des réels a, b, c que l'on explicitera, et une suite (ε_n) de limite nulle telle que l'on ait :

$$E(X_n) = an\ln(n) + bn + c + \varepsilon_n$$

Retrouver ainsi les résultats numériques demandés au I.4 en donnant à chaque fois un majorant de l'erreur commise.