ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle (notée aussi exp) par des fractions rationnelles.

Partie I : Etude d'une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des fonctions numériques f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x :

$$4x\, f''(x) - 8n\, f'(x) - x\, f(x) = 0$$

1. Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \exp(\dfrac{x}{2})$ appartient à E_0.

2. Étant donné un élément f_n de E_n, on note f_{n+1} la fonction définie sur R par :

$$f_{n+1}(x) = 2((2n+1)\, f_n(x) - x\, f_n'(x)) \tag{1}$$

   Montrer que :

   (a) $f_{n+1}'(x) = -\dfrac{x}{2}\, f_n(x)$

   (b) $f_{n+1} \in E_{n+1}$

3. On définit à partir de la fonction f_0 donné au I.1 et de la relation (1) une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n, f_n appartienne à E_n.

(a) Expliciter f_1.

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout nombre réel x :

$$f_{n+1}(x) = 2(2n+1)\, f_n(x) + x^2\, f_{n-1}(x) \tag{2}$$

4. Pour tout entier naturel n, on note P_n le polynôme définie pour tout nombre réel x par :

$$P_n(x) = f_n(x)\, e^{-\dfrac{x}{2}}$$

(a) Expliciter P_0 et P_1.

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout nombre réel x :

$$P_{n+1}(x) = 2(2n+1)\, P_n(x) + x^2\, P_{n-1}(x) \tag{3}$$

En déduire pour tout entier naturel n :

- que $P_n(x)$ est strictement positif pour $x < 2$
- que P_n est un polynôme à coefficients entiers dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré
- la valeur de $P_n(0)$

Partie II : Etude d'une suite de rationnels

Dans la suite du problème, on désigne par n un entier naturel et l'on pose pour tout nombre réel x non racine de P_n :

$$u_n(x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)}$$

En particulier, u_n est au moins définie sur $]-\infty; 2[$.

1. **Étude numérique d'un exemple**

(a) Écrire un algorithme de calcul des n premiers termes de la suite $(P_k(x))$ pour une valeur donnée du réel x.

(b) Utiliser cet algorithme pour calculer pour $k \leqslant 8$ les valeurs exactes de $P_k(1)$, $P_k(-1)$, et des valeurs approchées (à la précision fournie par la calculatrice) de $u_k(1)$ (les résultats obtenus figureront dans un tableau).
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n(1))$?

2. **Etude d'une fonction auxiliaire**
On désigne par g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (-1)^n [f_n(x) - f_n(-x)]$$

(a) Établir que, pour x non racine de P_n :

$$u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{2}}\, g_n(x)}{P_n(x)} \tag{4}$$

(b) Montrer que g_n est impaire et prouver que, pour tout nombre réel x :

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t.g_n(t)\, dt$$

(c) En déduire, par récurrence sur n que, pour tout réel positif x :

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \frac{e^{\frac{x}{2}}}{n!}$$

3. **Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leqslant 0$**

   (a) À l'aide de la relation (3), montrer, par récurrence sur n, que, pour $x \leqslant 0$:

   $$P_n(x) \geqslant P_n(0)$$

   (b) Déduire des résultats précédents que, pour tout réel $x \leqslant 0$:

   $$|u_n(x) - e^x| \leqslant \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leqslant 0$

4. **Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $0 \leqslant x < 2$**
   Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $0 \leqslant x < 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

   Dans la suite de cette partie, on étudie la suite $(u_n(x))$ pour x supérieur à 2.

5. **Variation de f_n**

   (a) Prouver, d'abord pour $x \leqslant 0$, puis (en utilisant g_n) pour $x > 0$ que, si n est pair, alors $f_n(x) > 0$.

   (b) Utiliser l'expression de $f'_{n+1}(x)$ en fonction de f_n obtenue en I.2a pour étudier les variations de f_n pour $n \geqslant 1$ (on commencera par l'étude de f_{2p+1}).

6. **Etude des racines de P_n**

   (a) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution si n est pair, et en possède une et une seule, notée a_p, si $n = 2p + 1$.

   (b) Montrer, en utilisant (2) et les variations de f_{2p+1}, que la suite (a_p) est strictement croissante.

   (c) Montrer que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$ (on pourra raisonner par l'absurde en considérant la suite $(u_{2p+1}(-L))$ avec $L = \lim a_p$)

7. **Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \geqslant 2$**

   (a) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 2$, il existe un entier p_x tel que, pour $n \geqslant 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.
   On n'étudie désormais la suite $(u_n(x))$ que pour $n \geqslant 2p_x$

   (b) Exprimer $(u_n(x))$ en fonction de $u_n(-x)$ pour $x \geqslant 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

Partie III : Vitesse de convergence de la suite $(u_n(x))$

1. **Equivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$**

   (a) On suppose que n est supérieur ou égal à 1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f_n sur $[x; 0]$, établir que, pour $x \leqslant 0$:

   $$0 \leqslant P_n(0) - P_n(x)\, e^{\frac{x}{2}} \leqslant \frac{x^2}{2} P_{n-1}(0)$$

(b) En déduire, que pour tout x fixé, $P_n(x)$ équivaut lorsque n tend vers l'infini à :

$$P_n(0)\, e^{-\frac{x}{2}}$$

(on commencera par le cas $x \leqslant 0$ et on l'étendra au cas $x > 0$ à l'aide de $u_n(x)$)

2. **Majoration de** $|u_n(x) - \exp(x)|$

(a) Déduire de la relation (4) que, pour tout réel x :

$$|u_n(x) - e^x| \leqslant |u_{n+1}(x) - u_n(x)|$$

(b) Déduire de la relation (3) que, pour tout réel x :

$$P_{n+1}(-x)\, P_n(x) - P_{n+1}(x)\, P_n(-x) = 2\,(-1)^n\, x^{2n+1}$$

(c) En déduire enfin que :

$$|u_n(x) - e^x| \leqslant \frac{2\;|x|^{2n+1}}{P_n(x)\, P_{n+1}(x)}$$

(d) Donner un majorant de l'erreur commise au II.1b en prenant $u_7(1)$ comme valeur approchée du nombre e.

3. **Equivalent de** $u_n(x) - \exp(x)$
Déduire des résultats précédents, pour tout réel non nul x fixé :

(a) un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0$

(c) que $u_n(x) - \exp(x)$ équivaut quand n tend vers l'infini à :

$$(-1)^{n+1}\, e^{x-1}\, \left(\frac{e\,x}{4\,n}\right)^{2n+1}$$

(on rappelle : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\,\pi\,n}} = 1$)