ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES I

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre arbitraire.

EXERCICE I : Probabilités.

On désigne par m, n, k des entiers naturels et p un réel tel que $0 < p < 1$.
Une urne contient des boules blanches et noires, et la probabilité d'en tirer une boule blanche (respectivement noire) est p (respectivement $q = 1 - p$).
On effectue alors une suite de tirages successifs "au hasard" et "avec remise" (toute boule tirée de l'urne y est replacée avant de procéder au tirage suivant).
On définit les évènements suivants :

- B_k est réalisé si et seulement si $m + k + 1$ tirages sont nécessaires à l'obtention de $m + 1$ boules blanches (ce qui signifie donc que m boules blanches sont obtenues lors des $m + k$ premiers tirages, une $(m + 1)^{\text{ème}}$ boule blanche étant obtenue au $(m + k + 1)^{\text{ème}}$ tirage).

- N_k est réalisé si et seulement si $n + k + 1$ tirages sont nécessaires à l'obtention de $n + 1$ boules noires (ce qui signifie donc que n boules noires sont obtenues lors des $n + k$ premier tirages, une $(n + 1)^{\text{ème}}$ boule noire étant obtenue au $(n + k + 1)^{\text{ème}}$ tirage)

1. (a) Calculer les probabilités $P(B_k)$ et $P(N_k)$
   (b) Montrer que la famille $(B_0, B_1, ..., B_n, N_0, N_1, ..., N_m)$ constitue un système complet d'évènements.

(c) Déduire des résultats précédents que :

$$(1) \qquad p^{m+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^{m} q^{k}\right) + q^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} p^{k}\right) = 1$$

2. (a) Etudier le sens de variation de la suite (s_m) définie par : $s_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} p^k$.
   Donner à l'aide de la relation (1) un majorant de s_m ne dépendant pas de m.
   Etablir alors la convergence de la suite (s_m).

   (b) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Donner un équivalent de : C_{m+k}^{m} lorsque m tend vers l'infini, et en déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m \to +\infty} p^{m+1} C_{m+k}^{m} q^{k}.$$

   (c) Déduire des résultats précédents que : $\lim\limits_{m \to +\infty} s_m = \dfrac{1}{q^{n+1}}$.

3. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenant la valeur k si et seulement si l'évènement N_k est réalisé.

   (a) Vérifier que X est bien une variable aléatoire.

   (b) Vérifier la formule suivante pour $k \geqslant 1$: $kC_{n+k}^{n} = (n+1)C_{n+k}^{n+1}$.
   en déduire que X admet une espérance mathématique que l'on déterminera.

   (c) De façon analogue, déterminer l'espérance de $X(X-1)$ et en déduire la variance de X.

4. On suppose que $n \geqslant 1$ et l'on note Y_{n+1} la variable aléatoire prenant la valeur k si et seulement si c'est au $(n+k+1)^{\text{ème}}$ tirage que, pour la première fois, sont obtenues $n+1$ boules de la même couleur.

   (a) Préciser quelles sont les valeurs prises par Y_{n+1} et calculer $P([Y_{n+1} = k])$

   (b) Démontrer que l'espérance mathématique de Y_{n+1} est donnée par la formule suivante (on en déduira $E(Y_2)$)

$$E(Y_{n+1}) = (n+1)pq \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1+k}^{n+1} (pq)^k (p^{n-k} + q^{n-k})$$

   (c) On pose pour tout entier naturel k : $u_k = p^k + q^k$.
   Que valent u_0 ? u_1 ? Vérifier que, pour $k \geqslant 2$, $u_k = u_{k-1} - pqu_{k-2}$

   (d) En utilisant la formule précédente, puis la formule du triangle de Pascal, établir que, pour $n \geqslant 2$:

$$\frac{E(Y_{n+1})}{n+1} - \frac{E(Y_n)}{n} = C_{2n}^{n-1} \frac{(pq)^n}{n}$$

   En déduire une nouvelle expression de $E(Y_{n+1})$

5. Les notations sont celles de la question précédente, et on suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que $4pq < 1$

   (b) Montrer que $a_{k+1} \leqslant 4a_k$, où a_k est défini pour $k \geqslant 1$ par : $a_k = \dfrac{1}{k} C_{2k}^{k-1}$.

   (c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{E(Y_{n+1})}{n+1}\right)_n$ est convergente et donner un majorant de sa limite.

EXERCICE II : Analyse

L'objet de cet exercice est l'étude d'approximation de $x \mapsto \ln(1+x)$ par des fonctions affines $x \mapsto ax+b$ sur l'intervalle $I = [0,1]$

Dans la suite, on considère pour tout réel a la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax$$

A. On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_1(a,b) = \int_0^1 [\ln(1+x) - ax - b]^2 dx$$

(1) a. Etant donnés deux réels B et C, on demande déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque x décrit $\mathbb{R}$, ainsi que la valeur de la variable x qui réalise ce minimum :

$$x^2 - 2Bx + C.$$

b. Etant donnée une application continue $g : I \to \mathbb{R}$, en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque b décrit $\mathbb{R}$, ainsi que la valeur de la variable b qui réalise ce minimum :

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx.$$

(2) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx \quad ; \quad \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 x\ln(1+x)dx$$

(3) On pose :

$$F_1(a) = \int_0^1 (f_a(x))^2 dx - \left(\int_0^1 f_a(x)dx\right)^2$$

a. Expliciter $F_1(a)$.

b. Déterminer le minimum de F_1 ainsi que la valeur de a qui le réalise.

(4) Déduire des résultats précédents le minimum K_1 de l'expression $N_1(a,b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

B. On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_2(a,b) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\ln(1+x) - ax - b|$$

(1) Pour toute application continue $g : I \to \mathbb{R}$, on note :

$$M(g) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x) \quad ; \quad m(g) = \min_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x) \quad ; \quad \mu(g) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x)|.$$

En utilisant des réels x_1, x_2 de I tels que $g(x_1) = M(g)$, $g(x_2) = m(g)$ (on en justifiera l'existence), établir que, pour tout nombre réel b, on a :

$$\begin{cases} \mu(g-b) = \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b = \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \\ \mu(g-b) > \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b \neq \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \end{cases}$$

(2) a. Prouver que la dérivée de la fonction f_a s'annule sur I si et seulement si le réel a appartient à un intervalle $[\alpha, \beta]$ que l'on précisera.

b. En déduire les variations de la fonction f_a sur I en distinguant les trois cas : $a < \alpha$, $\alpha \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $a > \beta$.

(3) On pose :

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a)$$

a. Expliciter l'expression de $F_2(a)$ en fonction des valeurs de a, et tracer la courbe représentative de F_2 (en prenant pour unité 5 cm sur l'axe Ox, 10 cm sur l'axe Oy). Etudier la continuité et la dérivabilité de F_2.

b. Déterminer le minimum de F_2 ainsi que la valeur qui le réalise.

(4) Déduire des résultats précédents le minimum K_2 de l'expression $N_2(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

(5) Vérifier l'inégalité suivante :

$$K_1 \leqslant (K_2)^2$$

Etait-elle prévisible ?