ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE I : ANALYSE

On se propose, dans cet exercice, de rechercher des valeurs approchées des racines de l'équation $f(x) = 0$, où f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$$

1. Etude de la fonction f

   (a) Etudier les variations de f.

   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 racines distinctes a, b, c $(a < b < c)$.

   (c) Déterminer un encadrement du type $[\frac{n}{10}, \frac{n+1}{10}]$, où $n \in \mathbb{Z}$, pour chacune de ces trois racines a, b, c puis représenter graphiquement la fonction f.

2. Etude d'une suite convergeant vers c
   On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et :

$$(R) \qquad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n$$

   (a) Etablir que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, et que pour tout entier $n \geqslant 2$: $u_n > 0$.

   (b) Vérifier que les suites géométriques (a^n), (b^n), (c^n) satisfont à la relation (R).

(c) Exprimer en fonction de a, b, c trois nombres réels x, y, z tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=u_0=0 \\ ax+by+cz=u_1=0 \\ a^2x+b^2y+cz^2=u_2=1 \end{array}\right.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = xa^n + yb^n + zc^n$

(d) On pose pour $n \geqslant 2$: $\rho_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Prouver que la suite (ρ_n) converge vers c.

Exprimer $\rho_n - c$ en fonction du quotient $\dfrac{b^n - a^n}{b-a}$ et de u_n pour $n \geqslant 2$.

En déduire que $\rho_n - c$ est équivalent à $K(\dfrac{b}{c})^n$ lorsque n tend vers l'infini, où K est un nombre réel que l'on explicitera en fonction de a, b, c.

3. Algorithme de calcul de c.

(a) Rédiger en PASCAL un algorithme permettant de calculer d'une part la valeur de u_n, d'autre part celle de ρ_n, tant la condition $f(\rho_n - 10^{-6}).f(\rho_n + 10^{-6}) < 0$ n'est pas réalisée.

(b) En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de c (on précisera la valeur de l'entier n pour laquelle ρ_n convient).

4. Etude d'une suite convergeant vers a.
On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et :

$$(R') \qquad v_{n+3} = 3v_{n+2} + 6v_{n+1} + v_n$$

(a) Etablir que, pour tout entier naturel n : $v_n \geqslant 0$ puis que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $v_n > 0$.

(b) Vérifier que les suites géométriques $(-\dfrac{1}{a})^n$, $(-\dfrac{1}{b})^n$, $(\dfrac{1}{c})^n$ satisfont la relation (R')

(c) Exprimer en fonction de a, b, c les trois nombres réels x', y', z' tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x'+y'+z'=v_0=0 \\ \dfrac{x'}{a}+\dfrac{y'}{b}+\dfrac{z'}{c}=v_1=0 \\ \dfrac{x'}{a^2}+\dfrac{y'}{b^2}+\dfrac{z'}{c^2}=v_2=1 \end{array}\right.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = \frac{x'}{(-a)^n} + \frac{y'}{(-b)^n} + \frac{z'}{(-c)^n}.$$

(d) On pose pour $n \geqslant 1$: $q_n = \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$. Prouver que la suite (q_n) converge vers $-a$.

Déterminer un équivalent de $q_n + a$ lorsque n tend vers l'infini.

5. Algorithme de calcul de a.

(a) Rédiger en PASCAL un algorithme permettant de calculer d'une part la valeur de v_n, d'autre part celle de q_n, tant que la condition $f(-q_n - 10^{-6}).f(-q_n + 10^{-6}) < 0$ n'est pas réalisée.

(b) En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de a (on précisera la valeur de l'entier n pour laquelle $-q_n$ convient).

(c) Etablir enfin que $a + b + c = 6$ et en déduire une valeur approchée de b.

EXERCICE II : ALGEBRE

On désigne par n un entier naturel non nul, par $a_1, a_2, ..., a_n$ n nombres réels non nuls, et α le plus petit des n réels $|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|$.
On considère alors les trois matrices carrées d'ordre n définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi donc, $M = A - D$

1. Majoration de α lorsque A n'est pas inversible
   Dans toute cette question, on suppose que la matrice A n'est pas inversible.

   (a) Prouver qu'il existe n réels $x_1, x_2, ..., x_n$ non nuls tels que :
   $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Démontrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a :
   $$\alpha |x_i| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{i-1}| + |x_{i+1}| + \cdots + |x_n| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_j|$$

   (c) En déduire, par sommation de ces inégalités, que l'on a : $\alpha \leqslant n - 1$.

2. Etude d'une suite de matrices colonnes.
   Dans cette question, on suppose que $\alpha > n - 1$, donc que A est inversible.
   Etant donnés n nombres réels $b_1, b_2, ..., b_n$, il existe donc n nombres réels $x_1, x_2, ..., x_n$, uniques, tels que l'on ait :
   $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{que l'on note } AX = B.$$

   (a) Etablir que $X = -D^{-1}MX + D^{-1}B$
   Etant donné une matrice colonne à n lignes notée U_0, on définit une suite de matrices colonnes par la relation : $U_{k+1} = -D^{-1}MU_k + D^{-1}B$ ($k \in \mathbb{N}$), et l'on pose :
   $$U_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$$

   (b) Etablir que $U_{k+1} - X = -D^{-1}M(U_k - X)$. En déduire que l'on a :
   $$\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_{k+1,j} - x_j| \leqslant \frac{n-1}{\alpha} \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_{k,j} - x_j|$$

3. Etude d'un premier exemple (avec $\alpha > n - 1$)
On considère le système d'équations $AX = B$ et la matrice colonne U_0 suivants :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer x_1, x_2, x_3.

   (b) Déterminer les trois premières matrices-colonnes U_1, U_2, U_3 de la suite (U_k) définie au 2). Comparer U_3 à la solution exacte X du système $AX = B$.

4. Etude d'un second exemple (avec $\alpha \leqslant n - 1$)On considère le système d'équations $AX = B$ et la matrice colonne U_0 suivants :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer x_1, x_2, x_3.

   (b) Déterminer les trois premières matrices-colonnes U_1, U_2, U_3 de la suite (U_k) définie au 2), puis de façon générale, déterminer U_k. Que se passe-t-il ?