ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on désigne par x une variable réelle appartenant à $[0,1[$ et les fonctions considérées sont définies uniquement sur $[0,1[$. En particulier, les limites ou équivalents en 1 supposent x inférieur à 1.

PRELIMINAIRE

Etant données deux suites réelles à termes positifs (x_n) et (y_n), on pose:

$$z_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + ... + x_{n-1}y_1 + x_ny_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} z_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

b) En déduire que, si les séries Σx_n et Σy_n sont convergentes de sommes respectives X et Y, alors la série Σz_n est convergente de somme $Z = XY$.

PARTIE 1

On considère dans cette partie les deux suites de nombres réels (u_n) et (J_n) définies par :

- $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{3.5.7...(2n+1)}{2.4.6...(2n)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$.

- $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. (a) Etudier le sens de variation de la suite (J_n) et prouver sa convergence.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} pour $n \geqslant 2$.
   (c) Calculer J_0 et J_1. En déduire les valeurs de J_{2n} et de J_{2n+1} en fonction de u_n.

2. (a) Déduire successivement des résultats précédents les inégalités :

$$1 \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\frac{(u_n)^2}{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n}. \qquad (1)$$

$$0 \;\leqslant\; u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \leqslant \frac{u_n}{2n+1}. \qquad (2)$$

   (b) Déduire de (1) un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que l'application $\omega(t) = \tan(t)$ réalise une bijection de $]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
   On note ψ la bijection réciproque.
   Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Calculer l'intégrale suivante : $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2(t)}$ (on pourra poser $\tan = \sqrt{1-x}\tan(u)$).

4. (a) Démontrer que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} J_{2k}x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2(t)} - x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t)dt}{1 - x\cos^2(t)}$.
   (b) Etablir l'inégalité suivante: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t)dt}{1 - x\cos^2(t)} \leqslant \frac{J_{2n+2}}{1-x}$.
   (c) En déduire que: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1}$.

5. (a) Etablir par récurrence que : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2k+1}$.
   (b) A l'aide du résultat du préliminaire, en déduire que: $\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{\cap}{2}}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

6. En utilisant les inégalités (2), établir :
   (a) la convergence de la série : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n$;
   (b) la double inégalité: $x \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(1-x)^{\frac{\cap}{2}}S(x) \leqslant 1$. On donnera un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 1.

PARTIE 2

A toute partie A de $\mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_n = 1 & \text{si } n \in A \\ a_n = 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

On pose alors, sous réserve d'existence de ces nombres:

$$f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad P(A) = \lim_{x \to 1} (1-x) f_A(x).$$

1. Prouver que la série définissant $f_A(x)$ est convergente.
   On notera S l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $P(A)$ existe.

2. Etablir les propriétés suivantes :

   (a) si A appartient à S, alors $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

   (b) $\emptyset$ et N appartiennent à S; on précisera $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.

   (c) si A appartient à S, alors son complémentaire $\overline{A}$ appartient à S. On précisera $P(\overline{A})$ en fonction de $P(A)$.

   (d) si A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ appartiennent à S, alors $A \cup B$ appartient à S.
   On précisera $P(A \cup B)$ en fonction de $P(A)$ et de $P(B)$.

3. Montrer que les parties A suivantes appartiennent à S et préciser $P(A)$:

   (a) A partie finie de $\mathbb{N}$.

   (b) $A = q\mathbb{N} = \{qk \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$ où q est un entier naturel non nul donné.

   (c) $A = q\mathbb{N} + t = \{qk + t \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$ où q et t sont deux entiers naturels avec $q \neq 0$.

4. On se propose dans cette question d'établir que la partie C de $\mathbb{N}$ constituée des carrés d'entiers naturels non nuls appartient à S et de calculer $P(C)$. La suite (c_n) et la fonction f_C associées à C sont donc définies par :

$$\begin{cases} c_n = 1 & \text{si } n \in C \quad \text{soit } : \exists k \in \mathbb{N}^\times \text{ tel que } k^2 = n \\ c_n = 0 & \text{si } n \notin C \end{cases} \qquad \text{et} \quad f_C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2}.$$

   (a) L'aide de la question préliminaire, établir que: $\dfrac{f_C(x)}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}] x^n$ où $[a]$ désigne la partie entière de a, c'est-à-dire l'entier tel que $[a] \leqslant a < [a]+1$.

   (b) Démontrer la double inégalité suivante: $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n - \dfrac{f_C(x)}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

   (c) A l'aide des résultats de la partie 1, en déduire un équivalent de $f_C(x)$ quand x tend vers 1.
   Prouver que C appartient à S et donner $P(C)$.

5. On admet dans cette question que la partie D de N constituée des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls appartient à S, et l'on se propose de majorer $P(D)$.
   La suite (d_n) et la fonction f_D associées à D sont donc définies par :

$$\begin{cases} d_n = 1 & \text{si } n \in D \quad \text{soit } : \exists p \in \mathbb{N}^\times, \ \exists q \in \mathbb{N}^\times \text{ tel que } p^2 + q^2 = n \\ d_n = 0 & \text{si } n \notin D \end{cases} \qquad \text{et} \quad f_D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

   On note $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $p^2 + q^2 = n$.

(a) Etablir que :

$$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n.$$

(b) Etablir que :

$$f_D(x) \leqslant (f_C(x))^2.$$

En déduire un majorant de $P(D)$.

(c) En comparant d_n et $v(n)$, montrer que l'on a plus précisément:

$$2 f_D(x) \leqslant (f_C(x))^2 + f_C(x^2).$$

En déduire un nouveau majorant de $P(D)$.