ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet du problème consiste en l'étude de la complexité de deux algorithmes.
Dans la **partie I**, on s'intéresse à un premier algorithme, permettant la recherche du plus grand élément d'un tableau de nombres non triés, et dans la **partie II**, à un second algorithme permettant la recherche des deux plus grands éléments d'un tableau de nombres non triés.

PRELIMINAIRES.

1. On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant$ par: $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$. A cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

   (a) Etablir l'encadrement suivant :
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

   (b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), et prouver qu'elles sont adjacentes (on rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, la différence des deux ayant pour limite 0).

2. On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) et, pour évaluer numériquement γ, on se propose d'utiliser la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n:
   $$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(a) Prouver l'inégalité suivante:

$$|m_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{2n}$$

(b) Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} et en déduire des valeurs approchées de γ à $0,1$ et $0,01$ près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5?

3. On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$.

   (a) Comparer $m_{k+1} - m_k$ à l'intégrale:

$$\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)}{t^3} dt$$

   (b) En déduire l'inégalité suivante:

$$0 \leqslant m_{k+1} - m_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

   En déduire par sommation un encadrement de $m_{n+p} - m_n$, puis de $\gamma - m_n$.
   A l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question 2, quel encadrement de γ obtient-on finalement?

Partie I

On considère une urne remplie de n boules ($n \geqslant 1$) numérotées respectivement $1, 2, \ldots, n$. On extrait ces n boules, une à une et sans remise, et l'on désigne par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ les variables aléatoires indiquant, dans cet ordre, les numéros des boules ainsi obtenues.
Pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note d'autre part X_p la variable aléatoire indiquant le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, autrement dit: $X_p = \sup(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p)$.

1. On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leqslant n$. On pose $\mathbb{N}_n = \{1, .., n\}$. On demande de préciser:

   (a) le nombre de parties A à p éléments choisis dans l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

   (b) le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

   (c) le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.

   (d) le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p-ième position.

   (e) le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p-ième position.

   (f) la probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leqslant n$.

2. Pour $1 < p \leqslant n$, on note B_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 1 si l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé, et 0 sinon. Montrer que l'espérance de B_p est égale à $1/p$, et donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + \cdots + B_n)$.

3. On considère l'algorithme suivant, dans lequel toutes les variables sont de type entier, et où l'on a affecté un entier supérieur à 1 à la variable n, et les entiers $1, 2, \ldots, n$ dans un ordre quelconque aux variables $Z[1], Z[2], \ldots, Z[n]$:

```
begin
X := Z[1];
for p:=2 to n do
                if Z[p] > X then X := Z[p];
end;
```

(a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme :
   - d'une part lorsque $Z[1] = 1, Z[2] = 2, \ldots, Z[n] = n$.
   - d'autre part lorsque $Z[1] = n, Z[2] = n-1, \ldots, Z[n] = 1$.

(b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans la variable X à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons ($>$) effectuées entre les valeurs de deux variables ainsi que le nombre maximal et le nombre minimal d'affectations (:=) effectuées.

(c) A l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre d'affectations effectuées au cours de l'algorithme en fonction de u_n, puis expliciter à l'aide du nombre γ des réels a et b tels que l'on ait:

$$E_n = a\ln(n) + b + \varepsilon_n, \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

(les notations u_n et γ ont été introduites dans la partie préliminaire).

Partie II

Le contexte probabiliste est celui introduit au début de la partie précédente. Pour $2 \leqslant p \leqslant n$, on note Y_p la variable aléatoire telle que X_p et Y_p indiquent respectivement les deux plus grands des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, avec $Y_p < X_p$.

1. En reprenant et en adaptant le raisonnement de la question I.1, préciser la probabilité $P(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1})$ pour $2 < p \leqslant n$.

2. Pour $2 < p \leqslant n$, on note C_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 0 si l'événement $Z_p < Y_{p-1}$ est réalisé, 1 si l'événement $Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}$ est réalisé, et 2 si l'événement $X_{p-1} < Z_p$ est réalisé.
Montrer que l'espérance de C_p est égale à $3/p$.

3. On modifie l'algorithme de la question I.3 de la façon suivante :

```
begin
if Z[2]> Z[1]  then
                    begin
                    X := Z[2]; Y := Z[1 ];
                    end;
               else
                    begin
                    X := Z[1]; Y := Z[2];
                    end;
for p:=3 to n do
                if  Z[p]> Y  then
                                    if Z[p] < X   then
                                                        Y := Z[p]
                                                  else
                                                        begin
                                                        Y:= X; X := Z[p];
                                                        end;
end;
```

(a) Indiquer les valeurs successivement prises par X et Y au cours de l'algorithme :

- d'une part lorsque $Z[1] = 1, Z[2] = 2, \ldots, Z[n] = n$.
- d'autre part lorsque $Z[1] = n, Z[2] = n-1, \ldots, Z[n] = 1$.

(b) On revient au cas général. Indiquer les valeurs contenues dans les variables X et Y à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre maximal et le nombre minimal de comparaisons ($>$) effectuées entre les valeurs de deux variables ainsi que d'affectations (:=) effectuées.

(c) A l'aide des résultats précédents, calculer les espérances E'_n et E''_n des nombres de comparaisons et d'affectations effectuées au cours de l'algorithme, puis expliciter à l'aide du nombre γ défini dans les préliminaires des réels a', b', c', a'', b'' tels que l'on ait :

$$\begin{cases} E'_n = a'n + b'\ln(n) + c' + \varepsilon'_n & \text{avec} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon'_n = 0. \\ E''_n = a''\ln(n) + b'' + \varepsilon'_n & \text{avec} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon''_n = 0. \end{cases}$$