# ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option économique et technologique**

## MATHEMATIQUES II

**Année 1991**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on désigne par $j$ un entier supérieur ou égal à 1.

# PARTIE I

On établir dans cette partie quelques résultats préliminaires d'Algèbre linéaire.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique, et l'on considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Etude des éléments propres de $M$

   (a) Quelles sont les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de $M$ ? (avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).

   (b) La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

   (c) Déterminer des vecteurs propres $v_1, v_2, v_3$ associés à chacune de ces trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (on prendra la dernière composant égale à 1).

   (d) Donner la matrice de passage $P$ de la base canonique à la base $(v_1, v_2, v_3)$, puis déterminer l'inverse de cette matrice.

2. Calcul des puissances de $M$

   (a) Déduire des résultats précédents une matrice diagonale $D$ telle que : $M = PDP^{-1}$.

   (b) En déduire l'expression de $M^{j-1}$ (on rappelle que l'entier naturel $j$ est non nul)

# PARTIE II

On considère dans cette partie un marché sur lequel 3 fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendantes, auprès de ces 3 fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable. On désigne :

- par $X_j$ la variable aléatoire indiquant le nombre de fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des $j$ premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'évènement $[X_j = k]$, où $k = 1$, 2 ou 3.
- par $U_j$ la matrice colonne suivante :
$$U_j = \begin{pmatrix} P(X_j = 1) \\ P(X_j = 2) \\ P(X_j = 3) \end{pmatrix}$$
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de $X_j$.

1. Etude de la loi des variables aléatoires $X_j$

   (a) Déterminer les trois probabilités conditionnelles suivantes :
   $$P(X_{j+1} = 1/X_j = 1), \qquad P(X_{j+1} = 1/X_j = 2) \qquad P(X_{j+1} = 1/X_j = 3)$$
   puis, à l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = 1)$ en fonction des probabilités $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$.
   Exprimer de même $P(X_{j+1} = 2)$ et $P(X_{j+1} = 3)$ en fonction de $P(X_j = 1)$, $P(X_j = 2)$, $P(X_j = 3)$

   (b) Etablir que $U_{j+1} = MU_j$.

   (c) Préciser $U_1$, puis calculer $U_j$ en fonction de $j$.

   (d) Déterminer la limite des éléments de la matrice $U_j$ lorsque $j$ tend vers $+\infty$.

2. Calcul de l'espérance de $X_i$.

   (a) On considère les matrices lignes $L$ et $J$ définies par $L = [1, 2, 3]$ et $J = [1, 1, 1]$.
   Déterminer deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $LM = \alpha L + \beta J$. Calculer $JU_i$, puis $LU_i$ en fonction de $E(X_j)$.
   Etablir alors que :
   $$E(X_{j+1}) = \alpha E(X_j) + \beta.$$

   (b) Préciser $E(X_1)$, puis calculer $E(X_j)$ en fonction de $j$.
   Vérifier que $E(X_j)$ tend vers 3 lorsque $j$ tend vers $+\infty$.

   (c) A quel entier $j_0$ (resp. $j_1$) le nombre $j$ des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir :
   $$2,9 \leqslant E(X_j) \leqslant 3 \qquad \text{(resp. } 2,99 \leqslant E(X_j) \leqslant 3 \text{ ) ?}$$
   On désigne désormais par $T$ la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des trois fournisseurs a reçu au moins une commande.

3. Etude de la loi de la variable aléatoire $T$

(a) Comparer les deux évènements $[T \leqslant j]$ et $[X_j = 3]$
en déduire $P(T = j)$ en fonction de $P(X_j = 3)$ et $P(X_{j-1} = 3)$ pour $j \geqslant 2$.
(Et l'on a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = 3)$, ces deux expressions étant évidemment nulles)

(b) A l'aide de l'expression de $P(X_j = 3)$ obtenu en II.1), établir que, pour $j \geqslant 2$ :

$$P(T = j) = (\frac{2}{3})^{j-1} - 2(\frac{1}{3})^{j-1}$$

(c) Calculer $P(T \leqslant j) = P(T = 1) + P(T = 2) + \cdots + P(T = j)$. En déduire que :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1$$

4. Calcul de l'espérance de $T$

(a) Etablir la formule suivante pour tout réel $x$ appartenant à $[0, 1[$ :

$$\sum_{j=2}^{n+1} x^j = x^2 \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

En dérivant cette égalité puis en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, calculer la somme

$$S(x) = \sum_{j=2}^{+\infty} j x^{j-1}$$

(b) En déduire la valeur de $E(T)$.

# PARTIE III

Dans cette partie, on pose pour tout entier $j \geqslant 1$ :

$$F(j) = 1 + 3(\frac{1}{3})^j - 3(\frac{2}{3})^j$$

1. Etude d'un algorithme

(a) Etudier le sens de variation de la suite $(F(j))$.
Préciser $F(1)$ et la limite de $F(j)$ lorsque $j$ tend vers l'infini.

(b) Prouver que, pour tout réel $y$ appartenant à $]0, 1[$, il existe un unique entier $j \geqslant 2$ tel que :

$$F(j - 1) < y \leqslant F(j).$$

(c) On considère l'algorithme suivant (dans lequel $y$ est une variable de type réel contenant une valeur appartenant à $]0, 1[$, $z$ une variable de type réel, et $n$, $p$, $q$ des variables de type entier) :

```
begin
n :  =1; p :=2 ; q :=3 ; z :=(1-y)/3 ;
while (p-1)/q > z do
    begin n :=n+1 ; p :=2*p ; q :=3*q ; end ;
write(n) ;
end ;
```

- Exprimer en fonction de $k$ les valeurs communes contenues par $n$, $p$, $q$ à l'issue du $k^{\text{ème}}$ passage dans la boucle **while .... do**, dans la mesure où celui-ci a lieu.
(pour $k = 0$, il n'y a aucun passage dans la boucle et les valeurs contenues dans $n$, $p$, $q$ sont $1, 2, 3$).
*On convient de noter $j$ la valeur finale contenue dans la variable $n$.*

- Exprimer en fonction de $j$ l'avant-dernière et la dernière valeur prises par $(p-1)/q$ au cours de l'algorithme. Quelle inégalités vérifient-elles ? En déduire que $F(j-1) < y \leqslant F(j)$.

(d) Déterminer enfin un équivalent de l'entier $j$ tel que $F(j-1) < y \leqslant F(j)$ lorsque le réel $y$ tend vers 1.

2. <u>Application à l'étude de la fonction de répartition de $T$</u>

(a) Comparer $P(T \leqslant j)$ et $F(j)$.

(b) A quel entier $j_0$ (resp. $j_1$) le nombre $j$ des clients ayant passé commande doit-il être supérieur afin d'avoir :

$$P(T \leqslant j) \geqslant 0,5 \qquad \text{(resp. } P(T \leqslant j) \geqslant 0,99) \text{ ?}$$