ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier donné, supérieur ou égal à 2, et par j un entier supérieur ou égal à 1.

Partie I.

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, et l'on considère l'application F associant à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ la fonction polynôme Q définie pour tout réel t par

$$Q(t) = P(t) + \frac{1-t}{n} P'(t)$$

1. Etude de l'application F.

   (a) Montrer que F est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   (b) On considère pour $1 \leqslant k \leqslant n$ la fonction polynôme P_k définie par $P_k(t) = t^{n-k}$. Expliciter la fonction polynôme $Q_k = F(P_k)$.

   (c) Déterminer la matrice M de F dans la base $B = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Etude des éléments propres de F.

   (a) Donner les valeurs propres de F. L'endomorphisme F est-il diagonalisable ?

   (b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.

(c) Soient k un entier tel que $1 \leqslant k < n$ et P un élément non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que: $F(P) = \dfrac{n-k}{n}P$.
Montrer que $P(1) = 0$.
On convient alors de poser $P(t) = (t-1)^r R(t)$, avec $1 \leqslant r < n$ et $R(1) \neq 0$.
Quelle relation vérifient alors r et R ? En déduire que $r = k$ et préciser le degré de R.

(d) Déterminer les sous-espaces propres de F associés aux différentes valeurs propres de F.

3. Etude d'une suite $U_{i+1} = F(U_i)$.
On considère la suite de fonctions polynômes définie par $U_1(t) = t^{n-1}$, puis $U_{j+1} = F(U_j)$.

(a) Etablir l'égalité suivante pour tout réel t : $U_1(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (t-1)^k$.

(b) En déduire $U_2(t), U_3(t)$, puis, par récurrence, $U_j(t)$ comme combinaisons linéaires de $1, t-1, \dots, (t-1)^{n-1}$.
Expliciter alors $U_j(0)$ sous forme d'une somme.

Partie II.

Dans toute la suite du problème, on considère un marché sur lequel n fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès de ces n fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable.
On désigne:

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre des fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un des j premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2, \dots, n$.
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j.

1. Etude de la loi des variables aléatoires X_j

(a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Donner les probabilités conditionnelles $P(X_{j+1} = k / X_j = k)$ et $P(X_{j+1} = k / X_j = k-1)$ (lorsque $k \geqslant 2$). Que vaut $P(X_{j+1} = k / X_j = i)$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant n$, l'entier i étant distinct de $k-1$ et de k.

(b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_j = i)$ où $1 \leqslant i \leqslant n$.
On convient, dans la suite de cette partie, de poser pour tout entier $j \geqslant 1$: $G_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_j = k) t^{n-k}$.

2. Etude de la suite (G_j)

(a) Préciser G_1, puis déduire de la question précédente que $G_{j+1} = F(G_j)$.
Vérifier alors que cette suite (G_j) n'est autre que la suite (U_j) définie en **I** 3)

(b) En déduire l'expression de $P(X_j = n)$. A l'aide d'un raisonnement probabiliste, établir que, si $1 \leqslant j < n$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0.$$

(c) Prouver que $P(X_j = n)$ tend vers 1 lorsque j tend vers $+\infty$, et en déduire quelles sont les limites de $E(X_j)$ et $V(X_j)$ lorsque j tend vers $+\infty$.

3. Calcul de l'espérance de X_j.

(a) Calculer $G_j(1)$, puis exprimer $G'_j(1)$ en fonction de $E(X_j)$ et de n.

(b) A l'aide de la relation $G_{j+1} = F(G_j)$, exprimer $(G_{j+1})'(1)$ en fonction de $(G_j)'(1)$. Que vaut $(G_1)'(1)$?

(c) En déduire $(G_j)'(1)$, puis $E(X_j)$ en fonction de j et de n. Retrouver ainsi la limite de $E(X_j)$ lorsque l'entier j tend vers $+\infty$.

Partie III.

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

1. Etude de la loi de la variable aléatoire T.

   (a) Comparer les deux événements $[T \leqslant j]$ et $[X_j = n]$. En déduire $P(T = j+1)$ en fonction de $P(X_{j+1} = n)$ et $P(X_j = n)$. (Et l'on a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = n)$, ces deux expressions étant évidemment nulles).

   (b) Evaluer $P(T = 1) + P(T = 2) + \cdots + P(T = j)$ en fonction de $P(X_j = n)$. En déduire que : $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(T = j) = 1$.

   (c) Déduire enfin de l'expression de $P(X_j = n)$ obtenue en **II**.2) que:

$$P(T = j + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k} \left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

2. Etude de l'espérance de T.

   (a) Donner l'expression, pour $1 \leqslant k < n$, de la somme suivante:

$$S = \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

   (b) En déduire que :

$$E(T - 1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k}.$$

   (c) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$ la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} (x - 1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

   (d) En déduire, par intégration de l'égalité précédente sur $[0, 1]$ que :

$$E(T) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

3. Evaluation asymptotique de $E(T)$.

   (a) Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir $E(T)$ en fonction de n.

   (b) A l'aide de cet algorithme, donner dans les deux cas $n = 10$ et $n = 100$ une valeur approchée du nombre moyen des consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des consommateurs a reçu au moins une commande.

   (c) Etablir pour tout entier $k \geqslant 1$ l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Quel équivalent de $E(T)$ en déduit-on lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?