ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1992

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par E_nl'ensemble (" l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$..") des applications f de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa derivée $n^{ième}$ $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note alors pour tout élément f de E_n :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right|$$

L'objet du problème est d'établir que $E_n$est inclus dans E_k pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, puis d'obtenir une majoration de $M_k$en fonction de M_0 et M_n.

PARTIE I

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et soit f un élément de E_2.

1. Une première majoration de M_1

   (a) Justifier l'inégalité suivante pour tout réel x et tout réel h :

   $$(1) \qquad f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \frac{M_2h^2}{2}.$$

   (b) En déduire que, pour tout réel x et tout réel h strictement positif, on a :

   $$f'(x) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$$

   puis en déduire que E_2 est inclus dans E_1.

(c) Etablir que : $M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}$.
On pourra étudier les variations de la fonction u définie pour $t > 0$ par :$u(t) = \dfrac{2M_0}{t} + \dfrac{M_2 t}{2}$.

2. Une seconde majoration de M_1.

(a) Soit t un nombre réel strictement positif. En appliquant l'inégalité (1) avec $h = t$, puis $h = -t$, établir que pour tout nombre réel x :
$$f'(x) = \frac{M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

(b) En procédant comme précédemment, en déduire une nouvelle majoration de M_1en fonction de M_0 et de M_2.

PARTIE II

On suppose dans cette partie que l'entier n est supérieur ou égal à 2, et l'on désigne par f un élément de E_n, par h_1, h_2, .., h_{n-1} $n-1$ nombres réels non nuls et deux à deux distincts, et l'on pose pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{h_1}{1!} f'(x) + \frac{h_1^2}{2!} f"(x) + \cdots + \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x), \quad F_2(x) = \frac{h_2}{1!} f'(x) + \frac{h_2^2}{2!} f"(x) + \cdots + \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x), \ldots \\ F_{n-1}(x) &= \frac{h_{n-1}}{1!} f'(x) + \frac{h_{n-1}^2}{2!} f"(x) + \cdots + \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

1. On considère le système suivant :
$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{h_1}{1!} x_1 + \dfrac{h_1^2}{2!} x_2 + \cdots + \dfrac{(h_1)^{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1} = 0, \\ \dfrac{h_2}{1!} x_1 + \dfrac{h_2^2}{2!} x_2 + \cdots + \dfrac{(h_2)^{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{h_{n-1}}{1!} x_1 + \dfrac{h_{n-1}^2}{2!} x_2 + \cdots + \dfrac{(h_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1} = 0 \end{array} \right.$$
Montrer que $x_1 = 0 = x_2 = ... = x_{n-1}$.
On pourra considérer la fonction polynôme : $P(t) = \dfrac{x_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-2} + \dfrac{x_{n-2}}{(n-2)!} t^{n-3} + ... + \dfrac{x_2}{2!} t_1$.

2. En déduire que chacune des fonctions $f', f", ..., f^{(k)}, ..., f^{(n-1)}$est une combinaison linénaire des fonctions $F_1, F_2, ..., F_n$.

3. Les inclusions de E_n dans E_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ Soient un nombre réel x et un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

(a) En majorant $f(x + h_k) - f(x) - F_k(x)$avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que :
$$F_k(x) = 2M_0 + \frac{h_k}{n!} M_n$$

(b) En déduire l'inclusion de E_n dans E_k.

PARTIE III

1. Majoration de M_1et M_2 en fonction de M_0 et de M_3.
On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément E_3.
En appliquant les résultats de la question I.2) aux fonctions f' et f, majorer M_2 en fonction de M_1 et de M_3, puis M_1 en fonction de M_0 et de M_2, et enfin M_1et M_2 en fonction de M_0 et de M_3.

2. Une seconde majoration de M_1 et M_2 en fonction de M_0 et de M_3.
   On suppose dans cette question que $n = 3$ et soit f un élément E_3.

   (a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f(x+h)$ et à $f(x-h)$, montrer que, pour tout réel x et tout réel strictement positif h, on a :

   $$f'(x) = \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6} \quad \text{et} \quad f"(x) = \frac{M_3 h}{3} + \frac{4M_0}{h^2}.$$

   (b) En déduire de nouvelles majorations de M_1 et de M_2 en fonction de M_0 et de M_3.

3. Majoration de M_{n-1} en fonction de M_0 et de M_n.
   On suppose dans cette question que $n = 2$ et soit f un élément E_n.

   (a) En appliquant les résultats de la question I.2) à la fonction $f^{(n-2)}$, majorer M_{n-1}en fonction de M_{n-2} et de M_n.

   (b) En déduire par récurrence sur l'entier n ($n \geqslant 2$) l'existence d'une suite de nombres réels (a_n) indépendants de f et tels que :

   $$M_{n-1} = a_n M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{1-\frac{1}{n}} \quad \text{avec} \quad a_n^n = 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}.$$

   (c) En déduire que : $M_{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{\frac{n-1}{n}}$

4. Majoration de M_k en fonction de M_0 et de M_n $(0 \leqslant k \leqslant n)$.
   On suppose dans cette question que $n = 2$ et soit f un élément E_n.
   Déduire par récurrence de la majoration obtenue précédemment pour que, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

   $$M_k = 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{\frac{n-k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

PARTIE IV

On se propose enfin d'établir que les majorations obtenues en I.2) et III.2) sont optimales. A cet effet, on considère pour tout entier $p = 1$ la fonction w_p définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 - \dfrac{1}{2p} \\ 2\sin p\pi(1-x) & \text{si } 1 - \dfrac{1}{2p} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par :

$$w_p(-x) = w_p(x) \quad \text{et} \quad w_p(2+x) = -w_p(x)$$

1. Etudier la continuité et la périodicité de w_p. Représenter graphiquement $w_1$sur $\mathbb{R}$.

2. Soit v_p la primitive de w_p s'annulant en 0.
   Donner l'expression de $v_p(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   Exprimer $v_p(-x)$ et $v_p(2+x)$ en fonction de $v_p(x)$.
   (controler : $v_p(-x) = -v_p(x)$, Représenter graphiquement $v_1$sur $\mathbb{R}$ et $v_p(2+x) = -v_p(x)$ *)*

3. Soit u_p la primitive de v_p s'annulant en 1.
   Donner l'expression de $u_p(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   Exprimer $u_p(-x)$ et $u_p(2+x)$ en fonction de $u_p(x)$.
   (étudier : $u_p(-x) - u_p(x)$ Représenter graphiquement $u_1$sur $\mathbb{R}$ et $u_p(2+x) + u_p(x)$*)*

4. Déterminer les réels suivants :

$$M_0(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_p(x)|\,, \quad M_1(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|u_p'(x)\right|\,, \quad M_2(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|u_p''(x)\right|\,.$$

   Quelles sont les limites de $M_0(p)$, $M_1(p)$ et $M_2(p)$ lorsque p tend vers l'infini ?
   En déduire que la majoration de M_1 en fonction de M_0 et de M_2 obtenue à la question I.2) est optimale.

5. On désigne par U_p la primitive de u_p s'annulant en 0
   Montrer à l'aide de cette fonction U_p que les majorations de M_1 et de M_2 obtenues précédemment en III.2) sont optimales.

- FIN -