ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite de jets d'un dé équilibré.

Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, et on étudie dans la partie II l'obtention de r as consécutifs (où r désigne un entier donné supérieur ou égal à 2).

PARTIE I

On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)$ définies pour $n \geqslant 1$ et vérifiant pour tout entier naturel $n \geqslant r$ la relation suivante :

$$(1) \qquad u_n + \frac{1}{6}u_{n-1} + (\frac{1}{6})^2 u_{n-2} + \cdots + (\frac{1}{6})^{r-1} u_{n-r+1} = (\frac{1}{6})^r$$

1. On suppose dans cette question que $r = 2$. Exprimer u_n en fonction de n et de u_1, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On étudie dans cette question les suites $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant (1).

   (a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).

   (b) Etablir que $u = (u_n)$ vérifie la relation (1) si et seulement si la suite $v = (v_n)$, définie par $v = u - c$, vérifie pour tout entier naturel $n \geqslant r$ la relation :

$$(2) \qquad v_n + \frac{1}{6}v_{n-1} + (\frac{1}{6})^2 v_{n-2} + \cdots + (\frac{1}{6})^{r-1} v_{n-r+1} = 0$$

(c) Etant donnée une suite $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant (2), on pose :

$$M = \max(|3v_1|\,,\ |3^2 v_2|\,, \ldots,\ |3^{r-2}v_{r-2}|\,,\ |3^{r-1}v_{r-1}|)$$

Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $|3^n v_n| \leqslant M$, et en déduire la limite de la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$.

(d) En déduire enfin la limite d'une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant (1).

PARTIE II

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r as consécutifs au cours de la suite des jets d'un dé décrite dans le préambule.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désignera par S_n l'événement :

" Obtenir un as à la n-ième expérience ".

1. Probabilité d'obtenir au moins une suite de r as.
On considère pour tout entier $n \geqslant 1$ l'événement $E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn}$:

" Obtenir as aux $[rn-(r-1)]$-ième, ..., $[rn-1]$-ième et $[rn]$-ième jet du dé ".

(a) Déterminer la probabilité des événements suivants :

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n} \qquad ; \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n} \cap \ldots$$

(intersection des complémentaires de $E_1, E_2, \ldots, E_n$, puis $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$.

(b) En déduire que l'obtention de r as consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2. Probabilité d'obtenir une suite de r as s'achevant la n-ième expérience.
Pour tout entier $n \geqslant r$, on désigne par U_n l'événement : " Obtenir une suite de r as consécutifs s'achevant à la n-ième expérience, c'est à dire une suite d'as aux $[n-(r-1)]$-ième, ..., $(n-1)$-ième , n-ième expériences, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r as consécutifs ".
Par exemple, si $r = 3$ et si l'on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par :

$$\underline{S\ S\ S}\ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ S\ E\ S\ E\ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E \ldots$$

mène à la réalisation des événements $U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, \ldots$, c'est à dire de suites de 3 as consécutifs s'achevant aux 3-ième, 6-ième, 12-ième, 20-ième, ... jets du dé.
On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.

On posera par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = \cdots = u_{r-1} = 0$.

(a) Montrer que la réalisation de l'événement $S_{n-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \ldots, U_{n-1}, U_n$ pour $n \geqslant r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie (1). Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

(b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 As consécutifs s'achève au n-ième jet du dé.

3. Etude de la première suite de r as consécutifs.
On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n du jet du dé où, *pour la première fois*, s'achève une suite de r as consécutifs.
Dans l'exemple donné dans la question **2**, X prend donc la valeur 3.

On posera donc pas convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \cdots = P(X = r-1) = 0$.

(a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question **1** que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X=n) = 1$$

(b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$:

$$U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que :

$$U(x) = 1 + \frac{(\frac{x}{6})^r}{1-(\frac{x}{6})^r} \frac{1-\frac{x}{6}}{1-x}$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences. En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) u_{n-k}$$

(d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, on associe la série dite série-produit $\sum c_n$ où $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k . \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit $\sum c_n$.

(e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) x^n$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0,1[$ (on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geqslant 1$).

(f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4. Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.

(a) On admet que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur $[0,1]$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r as consécutifs.

(b) On effectue à chaque seconde un jet du dé.
Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r as consécutifs lorsque $r = 5$, $r = 10$, $r = 25$.
(*A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à* 15 *milliards d'années*).