ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1 : analyse et probabilités

1. Somme des carrés des coefficients binômiaux.
   On considère un entier naturel n, et l'on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}.$$

   (a) Déterminer l'expression factorisée de u_n en calculant de deux façons le coefficient de x^n dans l'égalité polynômiale $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

   (b) Soient A, B deux ensembles disjoints de cardinaux égaux à n.
   Retrouver le résultat précédent en dénombrant de deux façons le nombre des parties à n éléments de la réunion $A \cup B$.

2. Equivalent asymptotique des intégrales de Wallis.
   On considère un entier naturel n, et l'on pose :

$$v_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$$

   (a) Etudier le sens de variation de la suite $(v_n)_n$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, prouver la relation (R) :

$$(R) \qquad (n+2)v_{n+2} = (n+1)v_n$$

(*On pourra utiliser le fait que* $\sin^{n+2}(t) = \sin(t).\sin^{n+1}(t)$)

(c) Etablir la double inégalité :

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$$

En déduire que v_{n+1} et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Etablir que la suite $n \mapsto (n+1)v_{n+1}v_n$ est constante, puis expliciter sa valeur. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(e) A l'aide de la relation (R), calculer v_{2n} et vérifier enfin que :

$$v_n = \frac{\pi}{2.4^n} u_n$$

3. Etude d'une suite d'expériences aléatoires
On considère une suite d'expériences aléatoires dont chacune consiste à jeter simultanément deux pièces équilibrées. Pour tout entier naturel non nul n, on se propose de déterminer la probabilité p_n de l'évènement E_n défini de la façon suivante : " A l'issue de la $n^{\text{ème}}$ expérience, les nombres de "Faces" amenés par les deux pièces sont égaux".

(a) Soient k, n deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer :

- la probabilité pour que le nombre de "Face" donné par une pièce équilibrée au cours de n jets de celle-ci soit égal à k.
- la probabilité $p(n,k)$ que le nombre de "Face" donné par chacune des deux pièces à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ expérience aléatoire soit égal à k.

(b) Exprimer p_n en fonction de u_n, puis de v_{2n}, et en déduire un équivalent de p_n lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

4. Nombre moyen de réalisations des évènements E_k pour $k \leqslant n$
Pour tout couple (k,n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note :

- B_k la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si l'évènement E_k est réalisé, et 0 sinon.
- $X_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$ la variable aléatoire indiquant le nombre des entiers k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ pour lesquels l'évènement E_k est réalisé, donc le nombre de fois où, durant les n premières expériences, il y a eu égalité des nombres de "Face" amenés par les deux pièces.

(a) Exprimer l'espérance de X_n en fonction $p_1, p_2, ..., p_n$.

(b) Etablir l'égalité suivante :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)C_{2n}^n}{4^n} - 1.$$

En déduire un équivalent de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 : algèbre et analyse

On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, l'on associe à tout élément f de E la fonction $F = L(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 t f(x-t)dt.$$

1. Propriétés de la fonction F
   Effectuer le changement de variable défini par $u = x - t$ dans l'intégrale définissant $F(x)$.
   En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser l'expression de $F'(x)$.

2. Un premier exemple
   Déterminer $F(x)$ lorsque $f(x) = \exp(ax)$, où a est un réel non nul donné.

3. Un second exemple
   On considère pour tout entier naturel n les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ et leurs images par L notées $F_n = L(f_n)$ et l'on désigne par E_n le sous-espace vectoriel constitué des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

   (a) Montrer que F_n appartient à E_n et exprimer F_n en fonction de $f_0, f_1, ..., f_n$.

   (b) A l'aide du résultat de la question 1, donner une expression de $F_n'(x)$.
   En déduire une nouvelle expression de $F_n(x)$ ainsi qu'une forme simplifiée de :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+2}.$$

   (c) A tout élément $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ de E_3, on associe son image par L que l'on convient de noter $F = A_0 f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3$.
   - Ecrire la matrice M de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :
   $$(a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto (A_0, A_1, A_2, A_3)$$
   - La matrice M est-elle diagonalisable ?
   - Montrer que $(2M - I)^4 = 0$. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_4, M, M^2, M^3.
   - Exprimer en fonction de A_0, A_1, A_2, A_3 l'unique antécédent dans E_3 de la fonction $F = A_0 f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3$.

4. Un troisième exemple
   On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ et son image par L notée F.

   (a) Prouver que, pour tout nombre x, on a $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) Expliciter $F(x)$ en distinguant les cas $x \leqslant 0$, $0 < x < 1$, $1 \leqslant x$.

   (c) Etablir sans calcul de dérivée que F est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

   (d) Déterminer les limites de $F(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$ et donner un équivalent de $F(x)$ dans ces deux cas.

   (e) Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$ pour $0 < x < 1$. En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe représentative.