# ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

**Option générale**

MATHEMATIQUES I

**Année 1993**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet du problème, développé dans la partie III , est l'obtention de valeurs approchées du nombre $\pi$ .
Dans toute la suite, on désigne par $n$ un entier naturel et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1.
On notera aussi, pour simplifier les écritures : $b = a^2 + 1$.

## Partie 1: Étude d'intégrales.

1. On désigne par $p$, $q$ des entiers naturels et l'on étudie l'intégrale :

$$I(p;q) = \int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q dt.$$

   (a) On suppose que $q \geqslant 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p;q)$ et $I(p+1;q-1)$.

   (b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p;q)$, et en particulier celle de l'intégrale $I(p;p)$ que l'on notera $J(p)$ dans la suite du problème.

   (c) En étudiant le maximum sur $[0;1]$ de $t \mapsto t^2(l-t^2)$, établir que l'on a $0 \leqslant J(p) \leqslant \dfrac{1}{4^p}$.

2. On étudie dans cette question l'intégrale : $f(a) = \int_0^{1/a} \dfrac{dt}{1+t^2}$.

   (a) Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$.

(b) Établir pour $a \neq 1$ l'égalité suivante :

$$(1) \qquad f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1).$$

(on pourra utiliser dans l'intégrale donnant $f(\frac{a+1}{a-1})$ le changement de variable défini par $t = \frac{ax-1}{x+a}$.

(c) Établir que : $f(a) = a\int\limits_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}$

## Partie II : étude d'une suite de polynômes.

1. On considère les fonctions-polynômes définies par : $P_n(x) = 1 + \lambda_n x^n (1-x)^n$.
Déterminer le nombre réel $\lambda_n$ pour que $-a^2$ soit racine de $P_n$.

On supposera $\lambda_n$ ainsi choisi dans toute la suite du problème.
On désignera alors par $Q_n$ la fonction polynôme définie par : $P_n(x) = (x+a^2)Q_n(x)$

2. (a) Expliciter $Q_0$ et $Q_1$.

(b) En considérant $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ , établir pour tout nombre réel x la formule suivante :

$$(2) \qquad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left(-\frac{x(1-x)}{a^2 b}\right)^n Q_1(x).$$

En déduire l'expression de $Q_2(x)$.

## Partie III : détermination de valeurs approchées de $\pi$.

1. Une première approximation de $\pi$ . On pose : $u_n(a) = a\int\limits_0^1 Q_n(t^2)dt$

(a) Calculer $u_1(a)$ et $u_2(a)$.

(b) Vérifier que : $u_2(a) = a\int\limits_0^1 \frac{P_2\left(t^2\right)}{a^2+t^2}dt$

En déduire la double inégalité suivante : $u_2(a) + \frac{J\left(2\right)}{a^3 b^3} \leqslant f(a) \leqslant u_2(a) + \frac{J\left(2\right)}{a^5 b^2}$.

(c) Donner un encadrement décimal de $f(2)$ et $f(3)$ (avec les 6 premières décimales).

(d) À l'aide de la relation (1) , en déduire une valeur décimale approchée du nombre $\pi$ (avec les 6 premières décimales, et une indication sur la précision obtenue).

2. Généralisation.

(a) Établir l'inégalité suivante :

$$(3) \qquad |u_n(a) - f(a)| \leqslant \frac{1}{\left(4a^2 b\right)^n a}.$$

(b) Établir à l'aide de l'égalité (2) que :

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n aJ\left(n\right)}{\left(a^2 b\right)^{n+1}} \frac{2\left(2b-1\right)n + 3b - 1}{4n+3}$$

(c) On pose : $v_n(a) = u_{n+1}(a) - u_n(a)$.
Exprimer pour $n \geqslant 1$ le rapport $\frac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ en fonction de $n$ et de $a$.

(d) On donne un entier naturel $n$ et un nombre réel a supérieur à 1. Rédiger en PASCAL :

- une procédure de calcul de $u_k(a)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ (on utilisera la suite($v_k(a)$)).
- une procédure de calcul d'une valeur approchée de $\pi$ (on utilisera la relation (1) ).

(e) On choisit $n = 5$ et $a = 2$. Quelle valeur approchée de $\pi$ obtient-on ainsi ?
Indiquer à l'aide de l'inégalité (3) la précision de cette approximation.

3. Recherche d'un choix optimal pour a.
On suppose dans cette question que $a > 1$ et l'on pose : $w_n(a) = 4\left(u_n(a) + u_n\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)\right)$.

(a) Soit c le plus petit des deux nombres $a$ et $\dfrac{a+1}{a-1}$.
Montrer que : $|w_n(a) - \pi| \leqslant \dfrac{8}{c\left(4c^2\left(1+c^2\right)\right)^n}$

(b) Tracer la courbe représentative de la fonction définie pour $a > 1$ par :

$$a \mapsto \min\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right).$$

En déduire pour quelle valeur $a_0$, de a le nombre $c$ défini ci-dessus est maximal.

(c) On choisit $a = \dfrac{5}{2}$. Donner un majorant de $|w_n(a) - \pi|$. Qu'obtient-on alors pour $n = 5$ ?