ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p (ceci signifiant qu'a chaque expérience, la probabilité de succès est égale à p, où p est un réel donne tel que $0 < p < 1$).

Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs (où r désigne un entier donné tel que $r \geqslant 2$).

PARTIE I

On désigne par S l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes.

On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)$ de S vérifiant pour tout entier naturel $n \geqslant r-1$ la relation suivante :

$$(1) \qquad u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \cdots + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r$$

1. On considère le nombre complexe $\omega_r = e^{\frac{2i\pi}{r}} = \cos(\dfrac{2\pi}{r}) + i.\sin(\dfrac{2\pi}{r})$.

   (a) Déterminer en fonction de ω_r, les racines complexes de l'équation $z^r = 1$.

   (b) Soient x, y des entiers. Expliciter la valeur des sommes suivantes :

   $$s_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{kx} \qquad ; \qquad t_r(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-xk}\omega_r^{ky}$$

   Pour calculer $s_r(x)$, on distinguera 2 cas, selon que x est ou non multiple de r.

2. On considère la matrice M_r carrée d'ordre r définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_r & \dots & \omega_r^{y-1} & \dots & \omega_r^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{x-1} & \dots & \omega_r^{(x-1)(y-1)} & \dots & \omega_r^{(x-1)(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{r-1} & \dots & \omega_r^{(r-1)(y-1)} & \dots & \omega_r^{(r-1)(r-1)} \end{pmatrix}$$

On désigne par $\overline{M_r}$ la matrice conjuguée de M_r, c'est à dire la matrice carrée d'ordre r dont les éléments sont les conjugués des éléments de la matrice M_r.

(a) Expliciter à l'aide du nombre complexe i l'expression de M_r pour $r = 4$, puis calculer le produit $\overline{M_4}M_4$.

(b) A l'aide des résultats de la question 1, expliciter l'expression de $\overline{M_r}M_r$ dans le cas général, et en déduire que M_r est une matrice inversible.

(c) On considère r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ tels que, pour $0 \leqslant n \leqslant r-1$:

$$\lambda_0 + \lambda_1\omega_r^n + \lambda_2\omega_r^{2n} + \dots + \lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n} = 0$$

Etablir que ces r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sont nuls.

(d) En déduire l'indépendance des r suites géométriques suivantes :

$$e_0 = (p^n),\ e_1 = (p^n\omega_r^n),\ e_2 = (p^n\omega_r^{2n}), \dots, e_{r-1} = (p^n\omega_r^{(r-1)n})$$

3. On étudie dans cette question les suites $v = (v_n)$ de S qui vérifient pour tout entier naturel $n \geqslant r-1$ la relation suivante :

$$(2) \qquad v_n + pv_{n-1} + p^2v_{n-2} + \dots + p^{r-1}v_{n-r+1} = 0$$

(a) Etablir que les suites vérifiant (2) forment un sous-espace vectoriel E de S.

(b) Prouver que l'application F associant à tout élément $v = (v_n)$ de E l'élément de $\mathbb{C}^{r-1}$ défini par $F(v) = (v_0, v_1, \dots, v_{r-2})$ est linéaire et bijective.
En déduire la dimension de E.

(c) Etablir que les suites $e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$ appartiennent à E, et prouver que ce sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 dans E.

(d) En déduire que les suites $e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$ forment une base de E.
Donner la forme générale des suites $v = (v_n)$ vérifiant (2). En déduire la limite d'une telle suite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On étudie dans cette question les suites complexes $u = (u_n)$ vérifiant (1).

(a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).

(b) Etablir que la suite $u = (u_n)$ vérifie (1) si et seulement si la suite $v = (v_n)$, définie par la relation $v = u - c$, vérifie (2).

(c) En déduire enfin la limite d'une suite $u = (u_n)$ vérifiant (1).

PARTIE II

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours de la suite des expériences de Bernoulli décrites dans le préambule.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désignera par S_n l'événement :

" Obtenir un succès à la n-ième expérience ".

1. <u>Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès.</u>
   On considère pour tout entier $n \geqslant 1$ l'événement $E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \cdots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn}$:

   " Obtenir un succès aux $[rn-(r-1)]$-ième, ..., $[rn-1]$-ième et $[rn]$-ième expériences ".

   (a) Déterminer la probabilité des événements suivants :

   $$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_n} \qquad ; \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_n} \cap \ldots$$

   (intersection des complémentaires de $E_1,\, E_2, ..., E_n$, puis $E_1,\, E_2, ..., E_n, ...$

   (b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2. <u>Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant la n-ième expérience.</u>
   Pour tout entier $n \geqslant r$, on désigne par U_n l'événement : " Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la n-ième expérience, c'est à dire une suite de succès aux $[n-(r-1)]$-ième, $\ldots$, $(n-1)$-ième , n-ième expériences, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs ".
   Par exemple, si $r = 3$ et si l'on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par :

   $$\underline{S\ S\ S}\ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ S\ E\ S\ E\ \underline{S\ S\ S}\ \ S\ E \ldots$$

   mène à la réalisation des événements $U_3,\, U_6,\, U_{12},\, U_{20}, ...$, c'est à dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux 3-ième, 6-ième, 12-ième, 20-ième, $\ldots$ expériences.
   On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.

   On posera par convention $u_0 = 1$ *et* $u_1 = u_2 = \cdots = u_{r-1} = 0$.

   (a) Montrer que la réalisation de l'événement $S_{n-(r-1)} \cap \cdots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, ..., U_{n-1}, U_n$ pour $n \geqslant r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie (1).
   Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

   (b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 Faces (respectivement de 2 As) consécutifs s'achève a la n-ième expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée (respectivement d'un dé équilibré).

3. <u>Etude de la première suite de r succès consécutifs.</u>
   On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n de l'expérience où, *pour la première fois*, s'achève une suite de r succès consécutifs.
   Dans l'exemple donné dans la question **2**, X prend donc la valeur 3.

   On posera donc pas convention $P(X=0) = P(X=1) = \cdots = P(X=r-1) = 0$.

   (a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question **1** que :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X=n) = 1$$

   (b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$:

   $$U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

   Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que :

   $$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r} \frac{1-px}{1-x}$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences. En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) u_{n-k}$$

(d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$, on associe la série dite série-produit $\sum c_n$ où $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k . \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit $\sum c_n$.

(e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) x^n$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$ (on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geqslant 1$).

(f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4. Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.

(a) On admet que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur $[0, 1]$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r succès consécutifs.

(b) On suppose $p = 1/2$ (pièce équilibrée), puis $p = 1/6$ (dé équilibré), et l'on effectue à chaque seconde une expérience. Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs lorsque $r = 5$, $r = 10$, $r = 25$.
(A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).