ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On désigne par a et b deux nombres réels strictement positifs, et l'on considère l'intégrale $I(a,b)$ définie par :

$$I(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Le problème a pour objet d'exprimer cette intégrale $I(a,b)$ à l'aide de la fonction Γ définie pour tout nombre réel strictement positif p par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$$

Partie I

On étudie dans cette partie préliminaire l'intégrale impropre $\Gamma(p)$, avec $p > 0$.

1. **Convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ avec $p > 0$**

   (a) Déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{p+1}$.
   En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{p-1}$ sur $[1, +\infty[$.

   (b) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à $]0, 1]$ la double inégalité :

   $$0 \leqslant \int_x^1 e^{-t}t^{p-1}dt \leqslant \frac{1}{p}$$

   En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{p-1}$ sur $]0, 1]$.

(c) En déduire la convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ pour tout nombre réel $p > 0$.

2. **Expression de $\Gamma(p+1)$ pour p entier naturel.**

(a) A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de $\Gamma(p)$.

(b) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(p+1)$ lorsque p est un entier naturel.

Partie II

On désigne dans cette partie par p un nombre réel strictement positif, par x un nombre réel tel que $0 \leqslant x < 1$, et l'on considère la série :

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^n$$

1. **Convergence de la série définissant $g_p(x)$.**

(a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \mapsto n^{p+1}x^n$ lorsque x est fixé dans l'intervalle $[0, 1[$.

(b) En déduire la convergence de la série définissant $g_p(x)$ lorsque $0 \leqslant x < 1$.
Que vaut $g_p(0)$? Peut-on définir $g_p(x)$ pour $x = 1$?

2. **Etude des cas particuliers p = 1 et 2.**

(a) Donner l'expression (sans signe Σ) de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$.

(b) Donner le sens de variation, la limite et un équivalent de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

3. **Etude de la variation de g_p sur $[0, 1[$.**

(a) Comparer $g_p(x)$ et $g_p(y)$ lorsque $0 \leqslant x \leqslant y < 1$.
En déduire le sens de variation de la fonction g_p sur $[0, 1[$, et l'existence d'une limite L, éventuellement égale à $+\infty$, de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

(b) En considérant les sommes partielles de la série définissant $g_p(x)$, établir l'inégalité suivante pour tout x de $[0, 1[$ et tout entier $N \geqslant 1$:

$$g_p(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$$

En déduire la limite L de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).
On détermine maintenant un équivalent de $g_p(x)$ quand x tend vers 1.

4. **Etude du cas $0 < p \leqslant 1$.**

(a) Etudier le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto t^{p-1}x^t = t^{p-1}e^{t\ln(x)}$ lorsque le nombre réel x est fixé dans l'intervalle $]0, 1[$ (et $0 < p < 1$).
En déduire l'inégalité suivante pour tout entier naturel non nul n :

$$(n+1)^{p-1}x^{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t dt \leqslant n^{p-1}x^n$$

(b) En sommant ces inégalités pour $n \geqslant 1$, puis en effectuant le changement de variable $u = -t\ln(x)$ dans l'intégrale obtenue, en déduire que, pour $0 < x < 1$:

$$\int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du \leqslant |\ln(x)|^p\, g_p(x) \leqslant \int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du + x\,|\ln(x)|^p$$

(c) En déduire la limite de $|\ln(x)|^p g_p(x)$ quand x tend vers 1 (et $0 < p \leqslant 1$).
Montrer que $\ln(x)$ équivaut à $x-1$ lorsque x tend vers 1 et en déduire que $g_p(x)$ équivaut à

$$\frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$$

quand x tend vers 1 (et $0 < p \leqslant 1$).

5. **Etude du cas général.**

(a) Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1[$:

$$(1-x)g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^p - n^p]x^{n+1}$$

(b) Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité suivante pour tout entier $n \leqslant 1$ lorsque $0 < p \leqslant 1$:

$$p(n+1)^{p-1} \leqslant (n+1)^p - n^p \leqslant p.n^{p-1}$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

(c) En déduire l'inégalité suivante pour $0 \leqslant x < 1$ lorsque $0 < p \leqslant 1$:

$$pg_p(x) + (1-p)x \leqslant (1-x)g_{p+1}(x) \leqslant pxg_p(x) + x$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

(d) On suppose à nouveau que p est un nombre réel strictement positif quelconque.
Montrer que $g_p(x)$ équivaut encore à

$$\frac{\Gamma(p)}{(1-x)^p}$$

quand x tend vers 1.

Partie III

On se propose enfin, dans cette partie, d'appliquer les résultats précédents au calcul de l'intégrale $I(a,b)$ où a et b désignent deux réels strictement positifs.

1. **Calcul de $I(a.b)$ pour $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.**

(a) On considère une application $h : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$, de classe C^1, et on désigne par M_1 le maximum de $|h'(x)|$ lorsque x décrit $[\alpha, \beta]$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la primitive de h s'annulant en α, établir :

$$\left| \int_\alpha^\beta h(x)\,dx - (\beta-\alpha)h(\alpha) \right| \leqslant \frac{M_1(\beta-\alpha)^2}{2}$$

(b) On rappelle que, dans cette question, les réels a et b sont supérieurs ou égaux à 2.
Etablir que la fonction $x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$.
En lui appliquant le résultat précédent sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \dfrac{k}{n}$ avec $0 \leqslant k < n$, et en notant encore M_1 le maximum de la valeur absolue de sa dérivée lorsque x décrit $[0,1]$, montrer que :

$$|I(a,b) - u_n| \leqslant \frac{M_1}{2n} \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{b-1}$$

(c) On admet le résultat suivant :
"Etant données deux séries convergentes à termes réels positifs Σa_n et Σb_n (définis pour $n \geqslant 1$) et de sommes respectives A et B, la série Σc_n où c_n est défini pour $n \geqslant 2$ par $c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1$, est convergente et sa somme est AB".
En déduire le résultat suivant pour $0 \leqslant x < 1$:

$$g_a(x) g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n$$

(d) A l'aide des résultats précédents, montrer enfin que :

$$|g_a(x) g_b(x) - I(a,b) g_{a+b}(x)| \leqslant \frac{M_1}{2} g_{a+b-1}(x)$$

(e) Multiplier l'inégalité précédente par $(1-x)^{a+b}$, faire tendre x vers 1 et montrer, en utilisant l'équivalent en 1 de $g_p(x)$ obtenu dans la partie II, que :

$$I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

2. **Calcul de $I(a,b)$ dans le cas général.**
On étend ce résultat au cas où $a > 0$ et $b > 0$
(On ne demande pas de vérifier la convergence dans ce cas de l'intégrale $I(a,b)$).

(a) Etablir à l'aide d'un changement de variable simple que $I(a,b) = I(b,a)$.

(b) Prouver que $I(a+1,b) + I(a,b+1) = I(a,b)$.

(c) Par intégration par parties, exprimer $I(a,b+1)$ en fonction de $I(a+1,b)$
En déduire $I(a+1,b)$ en fonction de $I(a,b)$.

(d) En déduire que la formule obtenue précédemment pour $I(a,b)$ reste valable lorsque $a > 0$ et $b > 0$.