ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II). Dans la partie I, on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

PARTIE I

1. <u>Étude de suites récurrentes linéaires.</u>

   (a) On considère l'ensemble S des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geqslant 1$:

   $$9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0. \tag{1}$$

   Établir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

   (b) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

   (c) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geqslant 1}$ appartenant à S.

   (d) On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartenant à S.

   - \- Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que :

   $$\begin{cases} u_1 = \alpha + \dfrac{\sqrt{7}}{3}\beta - \dfrac{\sqrt{7}}{3}\gamma \\ u_2 = \alpha + \dfrac{7}{9}\beta + \dfrac{7}{9}\gamma \\ u_3 = \alpha + \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

(*On formera* $9u_3 - 7u_1$. *On donnera les expressions exactes de* α, β, γ).
On associe à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

- Établir qu'elle appartient à S et en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = 0$.
  Exprimer enfin u_n en fonction de n.

(e) En déduire que les trois suites obtenues ci-dessus au 1c forment une base de l'espace vectoriel S.

2. Étude des puissances d'une matrice.
On étudie la suite des puissances d'une matrice réelle d'ordre 4 notée M et satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0 \qquad (2)$$

Les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes. (3)

(a) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$M^n = a_nM + b_nM^2 + c_nM^3. \qquad (4)$$

- Établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n (s'ils existent).
- Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Établir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général.
  (On explicitera $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ *en fonction de* a_n, b_n, c_n *).*

(b) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n + b_n + c_n = 1$.

(c) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifient la relation (1).

(d) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1, établir pour tout entier $n \geqslant 1$ la formule suivante :

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n.

3. Étude d'un cas particulier.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), et l'on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(e_1) = e_2; \quad f(e_2) = \frac{e_1}{3} + \frac{2e_3}{3}; \quad f(e_3) = \frac{2e_2}{3} + \frac{e_4}{3}; \quad f(e_4) = e_4.$$

(a) Écrire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), calculer A^2, A^3, A^4, puis prouver que la matrice A satisfait aux conditions (2) et (3). Ainsi donc :

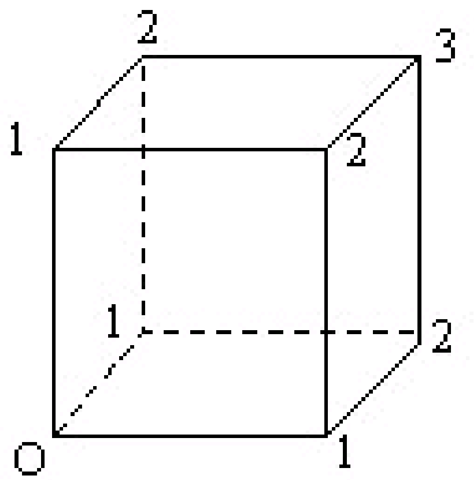
$$A^n = a_nA + b_nA^2 + c_nA^3 \quad (n \geqslant 1).$$

(b) Écrire la matrice B de f dans la base (e_4, e_3, e_2, e_1) et montrer que :

$$B^n = a_nB + b_nB^2 + c_nB^3 (n \geqslant 1).$$

PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet O :



A]

On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes :

A1) lorsque le point P atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant $n+1$, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.

A2) lorsque le point P atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_0 = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement impair et supérieur ou égal à 3) où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1. Lois des variables aléatoires X_n.
   Pour tout entier naturel n, on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités
   $$P(X_n = 0), \quad P(X_n = 1), \quad P(X_n = 2), \quad P(X_n = 3).$$
   (a) Explicier U_0, U_1, U_2.
   (b) Exprimer pour $i = 0, 1, 2, 3$ la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
   En déduire une matrice M, d'ordre 4, telle que pour tout entier $n \geqslant 0$:
   $$U_{n+1} = MU_n.$$
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0, et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis à la partie I.

2. Loi de la variable aléatoire T

(a) Comparer les événements "$X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$" et "$T = 2n+1$". En déduire la probabilité de l'événement "$T = 2n+1$".

(b) Vérifier alors que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n+1) = 1$.

(c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T.

B]

On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes :

B1) le point P est à l'instant 1 sur l'un des trois sommets du cube reliés à O par une arête puis, lorsqu'il atteint à l'instant $n \geqslant 1$un sommet S du cube autre que le sommet O, il se situe à l'instant $n+1$, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.

B2) lorsque le point P revient au sommet O du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- Y_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $Y_1 = 1$).
- R la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement pair et supérieur ou égal à 2) où, pour la première fois, le point revient au sommet O.

1. Lois des variables aléatoires Y_n
Pour tout entier naturel n, on note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités
$$P(Y_n = 0), \quad P(Y_n = 1), \quad P(Y_n = 2), \quad P(Y_n = 3).$$

   (a) Déterminer une matrice M, d'ordre 4, telle que l'on ait pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$V_{n+1} = MV_n.$$

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer V_n en fonction de M^{n-1} et V_1, et en déduire l'expression du vecteur V_n et de la loi de Y_n en fonction des réels $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ définis à la partie I.

2. Loi de la variable aléatoire R

   (a) Comparer pour $n \geqslant 1$ les événements "$Y_{2n-1} = 1$ et $Y_{2n} = 0$" et "$R = 2n$". En déduire la probabilité de l'événement "$R = 2n$".

   (b) Vérifier alors que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(R = 2n) = 1$.

   (c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire R.