ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES III

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1: Analyse.

Dans cet exercice, on pose pour tout entier naturel n et tout réel x :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

On pose alors pour tout nombre réel positif λ :

$$F_n(\lambda) = \int_0^\lambda f_n(t)\,dt.$$

On note enfin L_n la limite de $F_n(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$, si elle existe.

1. Etudier f_0, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

2. Exprimer la densité de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ à l'aide de f_0, puis en déduire la valeur de L_0.

3. Etudier f_1, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de f_1 sur la figure précédente.

4. Déterminer la valeur de $F_1(\lambda)$ à l'aide d'une intégration, puis en déduire L_1.

5. Etudier f_2, construire son tableau de variation, et représenter la courbe représentative de f_2 sur la figure précédente.

6. Exprimer $F_0(\lambda)$ en fonction de $F_2(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire L_0 en fonction de L_2 et enfin la valeur de L_2.

7. Pour $n \geqslant 2$, exprimer $F_{n-2}(\lambda)$ en fonction de $F_n(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties, puis en déduire L_{n-2} en fonction de L_n.
En déduire L_3, L_4, et de façon générale L_{2p-1} et L_{2p} pour tout entier $p \geqslant 1$.

Exercice 2: Probabilités.

Des pièces fabriquées dans une usine peuvent présenter deux types de défaut, notés A et B. Des études statistiques ont montré que :

- 8 % des pièces présentent le défaut A.
- parmi les pièces atteintes du défaut A, 15 % présentent le défaut B.
- parmi les pièces non atteintes du défaut A, 5 % présentent le défaut B.

1. On choisit au hasard une pièce produite. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   (a) La pièce présente les défauts A et B.
   (b) La pièce présente le défaut B mais pas le défaut A.
   (c) En déduire la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut B.

2. Montrer que la probabilité pour que la pièce ne présente ni le défaut A ni le défaut B est égale à $0,874$.

3. On prélève au hasard et avec remise 12 pièces produites. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 11 d'entre elles ne présentent ni le défaut A ni le défaut B, et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette probabilité.

Exercice 3: Algèbre linéaire.

1. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geqslant 1$ la relation :

$$(1) \qquad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0$$

   (a) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.
   (b) Déterminer les suites géométriques non nulles vérifiant (1).
   (c) On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant (1).
   - Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que :

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha + \dfrac{\sqrt{7}}{3}\beta - \dfrac{\sqrt{7}}{3}\gamma \\ u_2 &= \alpha + \dfrac{7}{9}\beta + \dfrac{7}{9}\gamma \\ u_3 &= \alpha + \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\gamma \end{cases}$$

(*On formera* $9u_3 - 7u_1$. *On donnera les expressions exactes de* α, β, γ).

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

  Etablir qu'elle vérifie (1), puis, en remarquant que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = 0$. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

(d) En déduire que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant (1) est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites obtenues au (b).

2. On se propose d'étudier la suite $(M^n)_{n\geqslant 1}$ des puissances de la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer M^2,.M^3, M^4 et en déduire que M vérifie les deux propriétés suivantes :

(2) $\quad 9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0.$
(3) $\quad$ Les matrices M, M^2,.M^3 sont linéairement indépendantes.

(b) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$(4) \qquad M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3.$$

- Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n s'ils existent).
- Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Etablir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général.
  (On explicitera a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n).

(c) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

(d) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifient la relation (1).

(e) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question **1.**, établir pour tout entier $n \geqslant 1$ la formule suivante :

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right]$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n.