ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES I

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, et pour tout polynôme P à coefficients réels, on note $M(P)$ le maximum de la fonction $x \mapsto |P(x)|$ sur le segment $[-1, +1]$.
On se propose alors de majorer pour tout entier naturel k le maximum $M(P^{(k)})$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{i\grave{e}me}$ de P) en fonction du maximum $M(P)$.

Partie I

On se propose d'étudier, dans cette partie, la suite de fonctions définies par récurrence pour tout nombre réel x par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis pour $n \geqslant 1$ par :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{1}$$

1. **Etude des polynômes T_n.**

   (a) Calculer $T_n(x)$ pour $n \leqslant 4$.

   (b) Etablir que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que, pour tout nombre réel x :
   $$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

   (c) Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

(d) Dans la base canonique $(X^n, ..., X, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, on note T_n sous la forme :

$$T_n(X) = \lambda_n[X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \cdots]$$

Calculer le coefficient dominant λ_n du polynôme T_n. A l'aide de la relation (1), exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et calculer b_n en fonction de n pour $n \geqslant 2$.

2. **Etude de la fonction T_n sur $]1, +\infty[$ pour $n \geqslant 1$.**

(a) On considère la fonction définie pour u appartenant à $]1, \infty[$ par :

$$x = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u})$$

Etablir qu'elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, puis montrer que :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(u^n + \frac{1}{u^n})$$

(b) En déduire pour $x > 1$ que $T_n(x) > 1$, et montrer, par récurrence, pour $x \geqslant 1$ l'inégalité :

$$T_n(X) \leqslant 2^{n-1} x^n$$

3. **Etude de la fonction T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \geqslant 1$.**

(a) A l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel θ l'égalité :

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \tag{2}$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

(b) Pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $\alpha_k = \cos\dfrac{(n-k)\pi}{n}$.

On remarquera que $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = +1$.

Calculer $T_n(\alpha_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, puis prouver que, si x désigne un nombre réel, l'égalité $|T_n(x)| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si x appartient à l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$.

4. **Equation différentielle vérifiée par T_n pour $n \geqslant 1$.**

(a) En dérivant la relation (2), exprimer $T_n'(\cos\theta)$ en fonction de θ $\quad (0 < \theta < \pi)$.
En déduire pour $n \geqslant 2$, la valeur de $T_n'(\alpha_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
Etait-ce prévisible ?
A l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T_n'(1)$ et $T_n'(-1)$.

(b) En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel x de $[-1, +1]$:

$$(x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2 T_n(x) = 0 \tag{3}$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel x.

(c) Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n-1$. En dérivant j fois la relation (3), établir que :

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1)$$

(d) En déduire en fonction de n le nombre réel μ_n tel que, pour $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n . 2^{j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}$$

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul et les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sont ceux définis à la partie I. On pose alors pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-\alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}$$

1. **Etude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.**

   (a) Calculer $L_k(\alpha_k)$ et $L_k(\alpha_j)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq k$.

   (b) Etablir que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Déterminer quelles sont, dans cette base, les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et, à l'aide des résultats de la partie I, donner les composantes de T_n.

2. **Majoration de $|\mathbf{P(x)}|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d^0P \leqslant n$.**

   (a) Etablir, pour $x \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, l'inégalité $(-1)^{n-k} L_k(x) \geqslant 0$.
   En déduire, pour $x \geqslant 1$, l'égalité

   $$T_n(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| + \cdots + |L_{n-1}(x)| + |L_n(x)| .$$

   (b) Etablir enfin, pour $x \geqslant 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité :

   $$|P(x)| \leqslant M(P) T_n(x) \tag{4}$$

   (c) On se propose enfin de minorer $M(P)$ lorsque P est un polynôme unitaire de degré n (c'est à dire un polynôme de degré n dont Ie coefficient de x^n est égal à 1).
   A l'aide de l'inégalité (4), établir successivement que l'on a, pour $x \geqslant 1$ et pour tout polynôme unitaire P de degré n :

   $$M(P) \geqslant \frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n}; \qquad M(P) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

   Donner en fonction de T_n un polynôme unitaire de degré n tel que $M(P) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. **Majoration de $|\mathbf{P'(x)}|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d^0P \leqslant n$**

   (a) Montrer à l'aide du théorème de Rolle (dont on rappellera précisément l'énoncé) que, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le polynôme L'_k possède $n-1$ racines réelles, appartenant à $]-1, +1[$.
   Déterminer le coefficient dominant de L'_k et en déduire que, pour $x \geqslant 1$:

   $$(-1)^{n-k} L'_k(x) \geqslant 0.$$

   (b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X)$, exprimer P' comme combinaison linéaire des polynômes $L'_0, L'_1, \ldots, L'_n$.
   En déduire, pour $x \geqslant 1$, l'égalité

   $$T'_n(x) = \left|L'_0(x)\right| + \left|L'_1(x)\right| + \cdots + \left|L'_{n-1}(x)\right| + \left|L'_n(x)\right| .$$

   (c) Etablir enfin, pour $x \geqslant 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité :

   $$\left|P'(x)\right| \leqslant M(P).T'_n(x) \tag{5}$$

4. **Majoration de $\left|\mathbf{P^{(j)}(x)}\right|$ sur $[1, +\infty[$ pour $0 \leqslant j \leqslant d^0P \leqslant n$.**

   (a) Montrer que, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le polynôme $L_k^{(j)}$ (dérivé $j^{ième}$ de L_k) possède $n-j$ racines réelles, appartenant à $]-1, +1[$, et en déduire que, pour $x \geqslant 1$:

   $$(-1)^{n-k} L_k^{(j)}(x) \geqslant 0.$$

   (b) En raisonnant comme précédemment, établir pour $x \geqslant 1$ et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$:

   $$\left|P^{(j)}(x)\right| \leqslant M(P).T_n^{(j)}(x) \tag{6}$$

Partie III

Dans cette partie, on désigne par λ un nombre réel appartenant à $[0,1]$.

1. Déterminer l'image du segment $[-1,+1]$ par l'application :

$$x \mapsto \frac{\lambda+1}{2}x+\frac{\lambda-1}{2}$$

On pose alors pour tout polynôme P à coefficients réels de degré $n \geqslant 1$:

$$P_\lambda(x)=P\left(\frac{\lambda+1}{2}x+\frac{\lambda-1}{2}\right)$$

Etablir que $M(P_\lambda) \leqslant M(P)$.

2. **Majoration de $M(P')$ en fonction de $M(P)$.**

   (a) Déterminer $P'_\lambda(1)$ et déduire de l'inégalité (5) que l'on a :

$$\left|P'(\lambda)\right| \leqslant \frac{2n^2}{1+\lambda}M(P)$$

   (b) En déduire que :

$$M(P') \leqslant 2n^2 M(P) \tag{7}$$

   (On pourra aussi introduire le polynôme Q défini par $Q(x)=P(-x)$).

3. **Majoration de $M(P^{(j)})$ en fonction de $M(P)$.**

   (a) Déduire de l'inégalité (7) que, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$M(P^{(j)}) \leqslant 2^j\left(\frac{n!}{(n-j)!}\right)^2 M(P) \tag{8}$$

   (b) On se propose enfin d'améliorer cette inégalité (8). Etablir que :

$$\left|P^{(j)}(\lambda)\right| \leqslant \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^j T_n^{(j)}(1)M(P)$$

   En déduire que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$M(P^{(j)}) \leqslant n2^{2j-1}\frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}M(P)$$

   et prouver que cette majoration est meilleure que celle obtenue en (8).