ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option générale

MATHEMATIQUES II

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour but l'étude des arrivées successives des clients à un guichet (distributeur de billets d'une banque, péage d'autoroute, etc). Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires d'analyse.

Partie I

Dans cette partie, on désigne par λ un nombre réel non nul donné, et l'on se propose d'étudier par récurrence la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout entier naturel n les deux conditions suivantes :

R_n : Pour tout couple (x, y) de réels positifs, f_n vérifie la relation :

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x)\, f_k(y)$$

D_n : f_n est dérivable à droite en 0 et l'on a :

$$f_n'(0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = \begin{cases} -\lambda & \text{si } n = 0 \\ +\lambda & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

1. *Étude du signe de la fonction f_0*
   Dans cette question, on considère une fonction $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0) :

R_0 : $\forall x\,,\, y \geqslant 0 \qquad f_0(x+y) = f_0(x)\, f_0(y)$
D_0 : $f_0'(0) = -\lambda$

(a) Établir que f_0 n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$.
En faisant alors $x = 0$ dans la relation (R_0), déterminer la valeur de $f_0(0)$.

(b) En faisant $x = y = \dfrac{t}{2}$ dans la relation (R_0), établir que $f_0(t) \geqslant 0$ lorsque $t \geqslant 0$.

(c) On se propose enfin d'établir que $f_0(t) > 0$ lorsque $t \geqslant 0$.
À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_0 tel que $f_0(t_0) = 0$. En déduire que $f_0(\dfrac{t_0}{2}) = 0$, puis, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $f_0(\dfrac{t_0}{2^n}) = 0$. Montrer qu'alors $f_0(0) = 0$ et conclure.

2. *Existence et unicité de la fonction* f_0
Dans cette question, on considère $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0).

(a) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $y > 0$ le rapport $\dfrac{f_0(x+y) - f_0(x)}{y}$, prouver que f_0 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier, à l'aide du résultat obtenu en 1, l'égalité $f_0(x-y) = \dfrac{f_0(x)}{f_0(y)}$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$.
- En formant pour $0 < y \leqslant x$ le rapport $\dfrac{f_0(x-y) - f_0(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_0(x-y)$, prouver que f_0 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

(b) En déduire que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer $f_0'(x)$ en fonction de λ et de $f_0(x)$.

(c) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$, puis en déduire $f_0(x)$ en fonction de λ et de x.

(d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_0 ainsi obtenue vérifie (R_0) et (D_0).

3. *Existence et unicité de la fonction* f_1
La fonction f_0 étant ainsi obtenue, on considère $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_1) et (D_1) :

R_1 : $\forall x\,,\, y \geqslant 0 \qquad f_1(x+y) = f_1(x) f_0(y) + f_0(x) f_1(y)$
D_1 : $f_1'(0) = \lambda$

(a) Déterminer $f_1(0)$ à l'aide de la relation (R_1), et en déduire la limite du quotient $\dfrac{f_1(y)}{y}$ quand y tend vers 0 ($y > 0$)

(b) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $0 < y$ le rapport $\dfrac{f_1(x+y) - f_1(x)}{y}$, prouver que f_1 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier l'égalité $f_1(x) = f_1(x-y) f_0(y) + f_0(x-y) f_1(y)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$ et en déduire une expression de $f_1(x-y)$
- En formant pour $0 < y \leqslant x$ le rapport $\dfrac{f_1(x-y) - f_1(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_1(x-y)$, prouver que f_1 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

(c) En déduire que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer $f_1'(x)$ en fonction de λ, $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

(d) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_1(x)$, puis en déduire $f_1(x)$ en fonction de λ et x.

(e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_1 ainsi obtenue vérifie (R_1) et (D_1).

4. *Existence et unicité de la fonction* f_2
Les fonctions f_0 et f_1 étant ainsi obtenues, on considère $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_2) et (D_2).

(a) Déterminer $f_2(0)$ à l'aide de la relation (R_2) et en déduire la limite du quotient $\dfrac{f_2(y)}{y}$ quand y tend vers 0 $(y > 0)$

(b) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $0 < y$ le rapport $\dfrac{f_2(x+y) - f_2(x)}{y}$, prouver que f_2 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier l'égalité $f_2(x) = f_2(x-y)f_0(y) + f_1(x-y)f_1(y) + f_0(x-y)f_2(y)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x$ et en déduire une expression de $f_2(x-y)$
- En formant pour $0 < y \leqslant x$ le rapport $\dfrac{f_2(x-y) - f_2(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_2(x-y)$, prouver que f_2 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

(c) En déduire que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que : $f_2'(x) = \lambda\,(f_1(x) - f_2(x))$.

(d) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_2(x)$, puis en déduire $f_2(x)$ en fonction de λ et x.

(e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_2 ainsi obtenue vérifie (R_2) et (D_2).

5. *Généralisation : existence et unicité de la fonction f_n $(n \geqslant 2)$*
On suppose avoir obtenu, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k < n$, une et une seule fonction f_k vérifiant (R_k) et (D_k), dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant $f_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$.
On considère alors une fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_n) et (D_n).

(a) Déterminer $f_n(0)$ et la limite du quotient $\dfrac{f_n(y)}{y}$ quand y tend vers 0 $(y > 0)$.

(b) Établir la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de λ, $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$.

(c) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$, puis en déduire $f_n(x)$ en fonction de λ et x, d'abord dans le cas $n = 3$, puis, par récurrence, dans le cas général.

(d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_n ainsi obtenue vérifie (R_n) et (D_n).

Partie II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.
Étant donnés deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1,\, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1; t_2]$.
(Par convention, on posera $P(N(t_1,\, t_1) = 0) = 1$, et, lorsque $n \geqslant 1$, $P(N(t_1,\, t_1) = n) = 0$). On fait, dans toute la suite du problème, les trois hypothèses suivantes :

A) Étant donnés quatres nombres réels t_1, t_2, t_3 et t_4 tels que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$, les variables aléatoires $N(t_1,\, t_2)$ et $N(t_3,\, t_4)$ sont indépendantes.
Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants

B) Pour tout entier naturel n, il existe une fonction $p_n : R^+ \to R$ telle que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tels que $t_1 \leqslant t_2$:

$$P(N(t_1,\, t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1)$$

Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instant t_1 et t_2 dépend uniquement de la durée $t_2 - t_1$

C) Il existe un réel $\lambda > 0$ et des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de limites nulles en 0 tels que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tel que $t_1 \leqslant t_2$:

$$\begin{aligned} P(N(t_1,\, t_2) = 1) &= \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1) \\ P(N(t_1,\, t_2) \geqslant 2) &= (t_2 - t_1)\varepsilon(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Cette hypothèse signifie que, pour une courte durée $t_2 - t_1$:
- la probabilité d'arrivée d'un seul client pendant cette courte durée $t_2 - t_1$ est approximativement proportionnelle à $t_2 - t_1$
- la probabilité d'arrivée de plus d'un client pendant cette courte durée $t_2 - t_1$ est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client

1. *Équation fonctionnelle des fonctions p_n*
   On considère dans cette question deux nombres réels positif x et y.

   (a) Exprimer $P(N(0, x + y) = 0)$ en fonction de $P(N(0, x) = 0)$ et de $P(N(0, y) = 0)$ et en déduire que $p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y)$.

   (b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)\, p_k(y)$$

2. *Dérivabilité en 0 des fonctions p_n*

   (a) Établir l'existence d'une fonction $\varepsilon_0 : R^+ \to R$ de limite nulle en 0 telle que :

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_0(t_2 - t_1)$$

   (b) Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'existence d'une fonction $\varepsilon_n : R^+ \to R$ de limite nulle en 0 telle que :

$$P(N(t_1, t_2) = n) = (t_2 - t_1)\varepsilon_n(t_2 - t_1)$$

   (c) Établir, en posant $x = t_2 - t_1$, que $p_0(x) = 1 - \lambda x + x\varepsilon_0(x)$, que $p_1(x) = \lambda x + x\varepsilon_1(x)$ et donner de même un développement limité à l'ordre 1 de p_n pour $n \geqslant 2$.

   (d) En déduire la valeur de $p_0'(0)$, de $p_1'(0)$ et de $p_n'(0)$ pour $n \geqslant 2$.

3. *Loi de la variable aléatoire $N(t_1, t_2)$*

   (a) Établir que les fonctions p_0, p_1 et p_n pour $n \geqslant 2$ vérifient les hypothèses (R_n) et (D_n) du I.

   (b) En déduire les expressions de $p_n(x)$ et de $P(N(t_1, t_2) = n)$ pour tout entier naturel n et montrer que la variable aléatoire $N(t_1; t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$

4. *Loi de l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client*
   On fixe un instant-origine et l'on note T_n la variable aléatoire (à valeur dans R^+) indiquant l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client ($n \geqslant 1$) à partir de cet instant-origine.

   (a) Comparer pour tout réel positif t les événements $(N(0, t) \leqslant n - 1)$ et $(T_n > t)$.

   (b) En déduire la loi de T_1 et reconnaitre celle-ci.

   (c) En déduire de même la fonction de répartition et la densité de T_2, de T_3, puis de T_n (dont la loi s'appelle *loi gamma de paramètres n et λ*)

   (d) Déterminer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire T_n.

5. *Loi du nombre de clients procédant à un achat*
   On désigne par p (où $0 < p < 1$) la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat et par $A(t_2, t_1)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1; t_2]$ et procédant à un achat.

   (a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
   Déterminer la probabilité conditionnelle $P(A(t_2, t_1) = k : / : N(t_2, t_1) = n)$ et reconnaître la loi de $A(t_2, t_1)$ conditionnée par $N(t_2, t_1) = n$.

(b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire $A(t_2, t_1)$ et préciser son espérance.

(c) Donner, de même, la loi de la variable aléatoire $B(t_1, t_2)$ indiquant le nombre des clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1; t_2]$ et ne procédant à aucun achat.

(d) Étudier enfin l'indépendance des variables aléatoires $A(t_2, t_1)$ et $B(t_2, t_1)$.