ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 : Probabilités

La clientèle d'une compagnie de transport est composée d'usagers réguliers effectuant chacun 40 trajets par mois (un chaque matin et un chaque soir 20 jours par mois).
Ces usagers doivent acheter chaque mois un titre de transport coûtant 400 F et couvrant l'ensemble des trajets mensuels.
Afin de lutter contre la fraude, la compagnie organise des contrôles de façon que la probabilité d'être contrôlé lors d'un trajet est égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à un autre.
Un usager pris en situation de fraude (c'est à dire n'ayant pas acheté le titre de transport mensuel) doit payer une taxe de N francs, et le but de l'exercice est de déterminer N pour qu'un fraudeur paie (en moyenne) au moins autant qu'un usager ayant acquis le titre de transport mensuel.
A cet effet, on considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de trajets mensuels au cours desquels un voyageur choisi au hasard est contrôlé.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X et préciser la probabilité $P(X = k)$, où k désigne un nombre entier compris entre 0 et 40.

2. Préciser l'espérance et la variance de X. Comment interpréter l'espérance de X ?

3. Déterminer la valeur minimale qu'il convient de donner à N pour qu'un fraudeur paie (en moyenne) au moins autant qu'un usager ayant acquis le titre de transport mensuel.

4. On fixe $N = 100$ F, puis $N = 200$ F. Quelle est la probabilité pour qu'un fraudeur paie une somme inférieure ou égale à celle d'un usager ayant acquis le titre de transport ?
   (On donnera les résultats, puis une valeur approchée de ceux-ci à 10^{-3} près).

Exercice 2 : Analyse

L'objet du problème est l'étude de l'équation $f(x) = x$, où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - e^{-2x}.$$

1. **Étude de la fonction f.**

   (a) Étudier les variations de f et déterminer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.

   (b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
   - Étudier les variations de g et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Établir que l'équation $g(x) = 0$ a, outre la solution $x = 0$, une solution α et une seule et montrer que celle-ci appartient à $]\dfrac{\ln 2}{2}; 1[$.
   - Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant figurer la droite d'équation $y = x$ et la tangente à la courbe à l'origine.

2. **Étude d 'une suite récurrente**.
   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et la relation

   $$u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\alpha < u_n$.

   (b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

3. **Détermination d'une valeur approchée de α.**

   (a) Prouver que $\ln(2) < \alpha$ et déterminer le maximum de f' sur l'intervalle $[\ln(2); +\infty[$.

   (b) En déduire pour tout entier naturel n l'encadrement $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{u_n - \alpha}{2}$, puis donner une majoration de $u_n - \alpha$ en fonction de n et de $u_0 - \alpha$.

   (c) On fixe désormais $u_0 = 1$. Montrer que $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et en déduire un entier naturel n pour lequel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

   (d) Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de u_n pour un entier n donné, et, avec la valeur de n obtenue à la question précédente, en déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près (que l'on donnera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice).

Exercice 3 : Analyse et probabilités.

1. **Étude d 'une équation fonctionnelle**.
   On considère une fonction continue non nulle $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant la relation :

   $$(1) \qquad \forall x, y \geqslant 0, \qquad f(x + y) = f(x)f(y).$$

   (a) En faisant $x = 0$ dans la relation (1), déterminer la valeur de $f(0)$.

   (b) En faisant $x = y = \dfrac{t}{2}$ dans la relation (1), établir que $f(t) \geqslant 0$ lorsque $t \geqslant 0$.
   On se propose maintenant d'établir que $f(t) > 0$ lorsque $t \geqslant 0$.
   À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_0, tel que $f(t_0) = 0$. En déduire que $f(\dfrac{t_0}{2}) = 0$, puis, par récurrence, que $f(\dfrac{t_0}{2^n}) = 0$, enfin que $f(0) = 0$. Conclure.

(c) Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction continue f s'annulant en 0.
En intégrant sur $[0;1]$ la fonction $y \mapsto f(x+y)$, établir la relation :

$$(2) \qquad \forall x \geqslant 0, \qquad F(x+1) - F(x) = F(1)f(x).$$

Montrer à l'aide des questions précédentes que $F(1) > 0$, puis en déduire que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Par dérivation de la fonction $y \mapsto f(x+y)$, établir que :

$$(3) \qquad \forall x \geqslant 0, \qquad f'(x) = f'(0)f(x).$$

(e) On pose $\lambda = -f'(0)$. Par dérivation de la fonction $g : x \mapsto f(x)\exp(\lambda x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de λ et de x.

(f) Réciproquement, montrer que la fonction f ainsi obtenue vérifie la relation (1).

On considère maintenant les arrivées successives des clients à un guichet.
Étant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1;t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$ et l'on note $P(N(t_1;t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients se présentent au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1;t_2]$. Par convention, on posera $P(N(t_1;t_1) = 0) = 1$.
On fait les hypothèses suivantes :

A) Étant donnés quatre nombres réels t_l, t_2, t_3, t_4 tels que $t_l \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$, les variables aléatoires $N(t_1;t_2)$ et $N(t_3;t_4)$ sont indépendantes.
(Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants).

B) Il existe une fonction continue $p_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout couple de nombres réels $(t_l;t_2)$ tels que $t_l \leqslant t_2$:

$$P(N(t_1;t_2) = 0) = p_0(t_2 - t_1).$$

(Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants $t_1$et t_2 dépend continûment de la durée $t_2 - t_1$).

2. **Loi de l'instant d'arrivée du premier client**.

(a) On considère dans cette question deux nombres réels positifs x, y.

- Exprimer $P(N(0;x+y) = 0)$ en fonction de $P(N(0;x) = 0)$ et de $P(N(x;x+y) = 0)$, puis montrer que $p_0(x+y) = p_0(x)p_0(y)$.
- Déduire alors de la question 1) l'expression de $p_0(x)$ en posant $\lambda = -p_0(x)$.

(b) On fixe un instant-origine et l'on note T la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) indiquant l'instant d'arrivée du premier client à partir de cet instant-origine.

- Justifier l'égalité des événements « $N(0;x) = 0$ » et « $T > x$ ».
- Déduire des résultats précédents la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire T dont on reconnaîtra la loi.
- Déterminer enfin l'espérance et la variance de T.