ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie 2. Dans la partie 1 sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

Partie 1

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs telle que la série $\sum p_n$ converge.

On considère la fonction F : $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k t^k \end{array}$ qui appelée fonction génératrice de cette suite.

1. Étude de F.

   (a) Montrer que pour $t \in [0;1]$ la suite de $n^{ème}$ terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k t^k$ est croissante majorée.
   En déduire que F est définie sur $[0,1]$.

   (b) Montrer que F est une fonction croissante sur $[0,1]$.

2. Étude locale de F en 1.

   (a) Montrer que F admet une limite à gauche en 1. On précisera le théorème utilisé.

   - Montrer que si $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant F(1) - F(t) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} p_k(1-t^k) + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} p_k$.

- En déduire que $0 \leqslant F(1) - \lim\limits_{t \to 1^-} F(t) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} p_k$.
- En faisant tendre n vers $+\infty$ déduire que F est continue à gauche de 1.

(b) Établir que

$$\forall t \in [0;1[, \quad \frac{F(t) - F(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1 + t + ... + t^{k-1}).$$

En déduire que la fonction φ : $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{F(t) - F(1)}{t-1} \end{array}$ est croissante sur $[0;1[$.

(c) On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_k kp_k$ converge.

Montrer que φ admet une limite à gauche de 1 et $\lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kp_k$.
En déduire que F est dérivable à gauche de 1 et en notant$F'_g(1)$ le nombre dérivé à gauche de F en 1, que $F'_g(1) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kp_k$.

(d) On suppose dans cette question que F est dérivable à gauche de 1.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0;1[, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \left(1 + t + .. + t^{k-1}\right) \leqslant \dfrac{F(t) - F(1)}{t-1}$
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kp_k \leqslant F'_g(1)$, puis que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kp_k \leqslant F'_g(1)$.

(e) En déduire que F admet une dérivée à gauche de 1 si et seulement si la série $\sum\limits_k kp_k$ converge et qu'on a $F'_g(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kp_k$.

(f) Application : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P\ (\ X = n)$.
Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance est que F admette une dérivée à gauche de 1. Que vaut $E\ (\ X)$?

3. Produit de deux fonctions génératrices.
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs telle que les séries $\sum p_n$ et$\sum q_n$ convergent. On définit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

(a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{j=0}^{n} r_j \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n} p_j \sum\limits_{j=0}^{n} q_j$. En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.

(b) Pour tout $t \in [0;1]$, on pose $F(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k t^k, \quad G(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k t^k, \quad H(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r_k t^k$.

- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1]\ \sum\limits_{j=0}^{n} r_j t^j \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n} p_j t^j \sum\limits_{j=0}^{n} q_j t^j \leqslant \sum\limits_{j=0}^{2n} r_j t^j$
- En déduire que $\forall t \in [0,1], \quad F(t)G(t) = H(t)$.

Partie 2

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p où p est un nombre réel tel que $p \in]0;1[$.
On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital de K francs avec $K \in \mathbb{N}^{\times}$.

- Il lance la pièce :

- Si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à $K+1$ francs.
- Si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à $K-1$ francs.

À l'issue de ceci : Si son capital est nul, il est ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne par :

- R_K l'événement " le joueur, muni d'un capital de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce ".
- $p_n(K)$ est la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{ième}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = 0$.
- $t \mapsto F_K(t)$ la fonction génératrice de $(p_n(K))_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $\forall t \in [0;1], \quad F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n$.

On vérifiera que $P(R_K) = F_K(1)$.

A. Étude du cas particulier K = 1.

On étudie ici le jeu en supposant que le capital initial du joueur est de 1 franc.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur

   (a) Calculer $p_1(1), p_2(1), p_3(1)$.

   (b) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{ème}$ jet de la pièce si et seulement s'il existe un entier j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, tel que :

   - à l'issue du premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
   - à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à un franc.
   - à l'issue des $n-j$ jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est alors ruiné.

   Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante. On rappelle que $p_0(K) = 0$.

   $$p\sum_{j=0}^{n} p_j(1)\, p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } n < 2 \end{cases}$$

   (c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente et en sommant pour $n \geqslant 0$, établir à l'aide de la Partie 1 3) la relation :

   $$\forall t \in [0;1], \quad pt(F_1(t))^2 = F_1(t) - (1-p)t.$$

   (d) Étudier les variations de $t \mapsto 1 - 4p(1-p)t^2$ sur $]0;1[$, et montrer que

   $$\forall t \in]0;1[, \quad 1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2.$$

   En déduire que pour $t \in]0;1[$ l'équation$ptx^2 - x + 1 - (1-p)t = 0$ est une équation qui possède deux racines réelles distinctes $x'(t), x"(t)$ avec $x'(t) < x"(t)$.
   Montrer que pour tout $t \in]0;1[$ $x"(t) > 1$, puis en remarquant que $\forall t \in]0;1[, \quad F_1(t) \leqslant 1$, en déduire pour $t \in]0;1[$ une expression $F_1(t)$ en fonction de p et t.

   (e) En faisant tendre t vers 1, déterminer $F_1(1)$ puis en déduire la probabilité $P(R_1)$ en distinguant les deux cas $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $p > \dfrac{1}{2}$.

2. Espérance et temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $p \leqslant \frac{1}{2}$, déterminer à l'aide de la Partie 1, 2) l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné.
Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?

B. Étude du cas général.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur

   (a) Le premier jet de la pièce donne Face (respectivement Pile) est l'événement noté ici F1 (respectivement P1). À l'aide du système complet d'événements { P1 ; F1}, établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a :

   $$p_n(1) = pp_{n-1}(2).$$

   En multipliant par t^n l'égalité précédente et en sommant, établir la relation :

   $$\forall t \in [0;1], \quad F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t,$$

   puis en déduire que

   $$\forall t \in [0;1], \quad F_2(t) = (F_1(t))^2.$$

   (b) On suppose ici que $K \geqslant 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(K) = \begin{cases} p\,p_{n-1}(K+1) + (1-p)\,p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

   En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, $F_{K+1}(t)$, $F_{K-1}(t)$ pour $t \in [0;1]$.
   Soit $t \in [0;1]$ et $(u_K)_{K\in\mathbb{N}^\times}$ la suite définie par $\forall K \in \mathbb{N}^\times, \quad u_K = F_K(t)$.
   Étudier la suite, $(u_K)_{K\in\mathbb{N}^\times}$ et exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K, t.

   (c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leqslant \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. Espérance et temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $p \leqslant \frac{1}{2}$, déterminer à l'aide la fonction génératrice F_K et des résultats de la Partie 1, 2) l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné.
Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?