ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1 : Analyse.

On considère dans tout ce problème une application f valeurs réelles et de classe C^3 sur un segment $[a,b]$. On se propose d'étudier quelques algorithmes de calcul approché de l'intégrale :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

A cet effet, étant donné un nombre entier naturel $n \geqslant 1$, on subdivise le segment $[a;b]$ en n sous-segments de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$, dont les extrémités sont respectivement notées

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \quad \text{avec} \quad x_k = a + k \times \frac{b-a}{n}, \quad \text{où} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Dans toute la suite, on désigne par $[\alpha;\beta]$ un segment inclus dans le segment $[a;b]$.

1. Évaluation de $I(f)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
   On considère les deux sommes suivantes :

$$G_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k); \quad D_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

(a) On note M_1 le maximum de $|f'(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ (on justifiera son existence).
Soient les deux fonctions u et v définies sur le segment $[\alpha, \beta]$ par :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^x f(t)dt - (x-\alpha)f(\alpha) - M_1\frac{(x-\alpha)^2}{2}. \\ v(x) &= \int_a^x f(t)dt - (x-\alpha)f(\alpha) - M_1\frac{(x-\alpha)^2}{2}. \end{aligned}$$

Calculer $u'(x)$, $u"(x)$ et en déduire les variations des fonctions u' et u.
Procéder de même pour l'étude de la fonction v.

(b) Déduire de ces résultats que :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \leqslant M_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

(c) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k; x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour $k = 0, 1, ..., n-1$, établir que :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - G_n\right| \leqslant M_1\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

On établit de façon analogue l'inégalité suivante :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - D_n\right| \leqslant M_1\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

2. Évaluation de $I(f)$ à l'aide de la méthode des trapèzes.
On considère maintenant la demi-somme $T_n = \dfrac{G_n + D_n}{2}$.

(a) On note M_2 le maximum de $|f"(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ (on justifiera son existence).
En calculant à l'aide d'intégrations par parties l'intégrale sur le segment $[\alpha, \beta]$ de la fonction $t \mapsto (t-\alpha)(t-\beta)f"(t)$, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))\right| \leqslant M_2\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k; x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour$k = 0, 1, ..., n-1$, quelle majoration de $\int_a^b f(t)dt - T_n$ obtient-on ?

3. Étude d'un exemple.

(a) Écrire en PASCAL un algorithme de calcul des sommes G_n, D_n, T_n, les réels a et b, la fonction f et l'entier n étant supposés donnés.

(b) On suppose dans cette question $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.
   - En posant $x = \tan(\theta)$, calculer la valeur de l'intégrale de f sur $[0; 1]$.
   - À l'aide de l'algorithme précédent, calculer des valeurs approchées de G_n, D_n, T_n pour $n = 5$, 10 et 20.

- Préciser de plus les valeurs de $S_5 = \dfrac{4T_{10} - T_5}{3}$ et $S_{10} = \dfrac{4T_{20} - T_{10}}{3}$.

4. Développement limité de T_n, et accélération de convergence.
On considère dans cette question quatre fonctions-polynômes définies par

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

P_2et P_3 étant telles que : $P_2' = P_1, \quad P_3' = P_2, \quad P_3(\alpha) = P_3(\beta) = 0.$

(a) Déterminer les fonctions-polynômes P_2 et P_3.

(b) Étudier les variations de la fonction P_2 sur $[\alpha, \beta]$ et préciser le maximum de $|P_2(x)|$ lorsque x décrit $[\alpha, \beta]$.
En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à P_3 sur $[\alpha; t]$ que, pour tout nombre réel t appartenant à $[\alpha, \beta]$, on a $|P_3(t)| \leqslant \dfrac{(\beta - \alpha)^3}{12}$.

(c) On note M_3 le maximum de $|f^{(3)}(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ (on justifiera son existence).
En calculant à l'aide d'intégrations par parties l'intégrale de la fonction $t \mapsto P_3(t) f^{(3)}(t)$, établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta - \alpha}{2}(f(\beta) + f(\alpha)) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}(f'(\beta) - f'(\alpha)) \right| \leqslant M_3 \frac{(\beta - \alpha)^4}{12}.$$

(d) En appliquant l'inégalité précédente avec $[\alpha, \beta] = [x_k; x_{k+1}]$, puis en sommant les inégalités obtenues pour $k = 0, 1, ..., n-1$, établir que le développement limite à la précision $1/n^2$ de T_n est :

$$T_n = \int_a^b f(t)dt + \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \varepsilon_n \times 1/n^2 \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

(e) Calculer $G_n - D_n$ et déterminer les expressions de G_n et D_n en fonction de T_n, puis en déduire les développements limites à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ de G_n et D_n et $S_n = \dfrac{4T_{2n} - T_n}{3}$.

PROBLEME 2 : Algèbre.

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et l'on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique.
On convient d'identifier tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes
x_1,x_2,..., x_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout nombre réel m, on considère la matrice réelle $A\ (m)$ d'ordre n définie par :

$$A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -m & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -m & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

1. Étude de l'inversibilité de $A(m)$ pour $|m| \geqslant 2$.

(a) On suppose qu'il existe un vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $A(m)X = 0$ et l'on note i le plus petit indice appartenant à $\{1; 2, ...; n\}$ tel que $|X_i| = \max(|X_1|\,; |X_2|\,; ...; |X_n|)$.

- Prouver que, si $i = 1$, alors $|m| \leqslant 1$.

- Démontrer un résultat analogue si $i = n$.
- Prouver que, si $2 \leqslant i \leqslant n-1$, alors $|m| < 2$.

(b) En déduire l'inversibilité de la matrice $A(m)$ pour $|m| \geqslant 2$.

2. Étude de l'inversibilité de $A(m)$ pour $|m| < 2$.
On suppose dans cette question que le nombre réel m appartient à $]-2;+2[$. II existe donc un unique nombre réel θ appartenant à $]0;\pi[$ tel que $m = 2\cos(\theta)$ et l'on note alors S le vecteur de composantes $(\sin(\theta);\sin(2\theta);...,\sin(n\theta))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Calculer les composantes du vecteur $A(m)X$ en utilisant la formule suivante :

$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

(b) En déduire n nombres réels θ_1, θ_2,..., θ_n avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n < \pi$ tels que $A(2\cos(\theta_k))$ ne soit pas inversible $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
En déduire les valeurs propres de $A(0)$.

(c) Montrer que les uniques valeurs de m pour lesquelles $A(m)$ n'est pas inversible sont

$$m_1 = 2\cos(\theta_l), \quad m_2 = 2\cos(\theta_2), ..., m_n = 2\cos(\theta_n).$$

3. Diagonalisation de $A(m)$.

(a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable? (on citera le théorème utilisé).

(b) Former une matrice P telle que $P^{-1}A(0)P$ soit égale à une matrice diagonale D dont on précisera les éléments.

(c) Plus généralement, la matrice $A(m)$ est-elle diagonalisable? Que vaut $P^{-1}A(m)P$?