ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie **II**. Dans la partie **I** sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

Partie I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge. On définit pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j$$

1. **Etude de la fonction F sur** $[0, 1]$.
   (a) Montrer que la série définissant $F(t)$ est convergente pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.
   (b) Montrer que F est une fonction croissante sur $[0, 1]$.
   En déduire que F admet une limite à droite en tout point de $[0, 1[$, et une limite à gauche en tout point de $]0, 1]$ (on précisera le théorème utilisé).
   (c) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $[0, 1[$.
   - Établir pour nombre réel t tel que $t_0 < t \leqslant 1$ et tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant F(t) - F(t_0) \leqslant \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0

(d) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $]0,1]$. En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0 en conclure que F est continue sur $[0,1]$.

2. **Étude locale de la fonction F en 0.**

(a) Pour tout nombre entier naturel n, établir que, pour tout nombre réel t de $[0,1]$:

$$0 \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leqslant t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

(b) On considère la fonction ε_n définie sur $]0,1]$ par l'égalité suivante:

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t)$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui permet d'obtenir $p_0, \ldots, p_n$

3. **Étude locale de la fonction F en 1.**

(a) Établir pour tout nombre réel t de $[0,1[$:

$$\frac{F(t) - F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1})$$

En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{F(t) - F(1)}{t-1}$ est croissante sur $[0,1[$.

(b) On suppose dans cette question la série $\sum j p_j$ convergente.
Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{F(t) - F(1)}{t-1}$ est alors majorée sur $[0,1[$, puis en déduire que la fonction F est dérivable en 1, et que :

$$F'(1) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j$$

(c) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.
Montrer pour tout nombre réel t de $[0,1[$ et tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1}) \leqslant \frac{F(t) - F(1)}{t-1}$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ... + np_n \leqslant F'(1)$, puis établir que la série $\sum j p_j$ est convergente et comparer sa somme à $F'(1)$.

(d) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si et seulement si la série $\sum j p_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à $F'(1)$.

(e) *Application* : pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans N prenne la valeur n.
À quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ? Comparer alors celle-ci à $F'(1)$.

4. **Produit de deux fonctions génératrices.**
Soient deux suites (p_n), (q_n) de nombres réels positifs telles que les séries $\sum p_n$, $\sum q_n$ convergent. On pose $r_n = p_0q_n + \ldots + p_iq_{n-i} + \ldots + p_nq_0$ pour tout nombre entier naturel n.

   (a) Établir pour tout entier naturel n la majoration suivante:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leqslant \sum_{j=0}^{n} p_j \,.\, \sum_{j=0}^{n} q_j$$

   En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.

   (b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \qquad G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \qquad H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j$$

   Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de $[0,1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leqslant \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \,.\, \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leqslant \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j$$

   En déduire l'égalité $F(t).G(t) = H(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Partie II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).
On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul):

- Il lance la pièce :
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à $K+1$ francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à $K-1$ francs.

  À l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.
- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par :

- R_K l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = O$.
- $t \mapsto F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie donc pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ par:

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K) t^n$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\sum p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier $K = 1$.

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1. **Etude de la probabilité de ruine du joueur.**

   (a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

   (b) Montrer, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ème}}$ jet de la pièce si et seulement s'il existe un entier j (où $1 \leqslant j \leqslant n-1$) tel que :

   - à l'issue du premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
   - à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
   - à l'issue des $n-j$ jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

   Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_0(1) = 0$) :

   $$p \sum_{j=0}^{n} p_j(1) p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

   (c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geqslant 0$, établir à l'aide des résultats de I.4 la relation $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.

   (d) Étudier les variations de la fonction $t \mapsto 1 - 4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle $]0,1[$, et montrer que $1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.
   En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes $x'(t)$ et $x''(t)$ (on supposera $x'(t) < x''(t)$).
   Pour tout nombre réel t appartenant à $]0,1[$, montrer que $x''(t) > 1$ puis, en remarquant que $F_1(t) \leqslant 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.

   (e) En faisant tendre t vers 1, déterminer alors $F_1(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $p > \dfrac{1}{2}$.

2. **Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leqslant \dfrac{1}{2}$**

   Pour $p < \dfrac{1}{2}$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \dfrac{1}{2}$?

3. **Expression des probabilités $p_n(1)$.**

   (a) Rappeler le développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre $2m+1$ de la fonction F_1 en 0.

   (b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel n, $p_{2n}(1) = 0$ et :

   $$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} p^n (1-p)^{n+1}$$

II.2 Etude du cas général.

1. **Etude de la probabilité de ruine du joueur.**

(a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1. À l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geqslant 2$:

$$p_n(1) = pp_{n-1}(2)$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geqslant 2$, établir la relation $F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$

(b) On suppose ici $K \geqslant 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante:

$$p_n(K) = \begin{cases} pp_{n-1}(K+1) + (1-p)p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, $F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. En étudiant alors la suite $K \mapsto u_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.

(c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leqslant \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. **Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p < \frac{1}{2}$.**

Pour $p < \frac{1}{2}$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.3 L'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?

3. **Expression des probabilités $p_n(K)$.**

(a) À l'aide des résultats obtenus en II.2.1a, établir que $p_{2n+1}(2) = O$ puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout nombre entier naturel n.

(b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geqslant 1$.