ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Un locataire décide d'occuper un appartement à partir du 1^{er} janvier, et a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est fixé à 48 000 F et le locataire s'engage à occuper l'appartement pendant 9 années complètes.

1. Contrat $n°1$.
   Le locataire accepte une augmentation annuelle de 3% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer u_2 payé la deuxième année de location.
   (b) Exprimer le loyer u_n payé la $n^{ième}$ année de location en fonction de n.
   En particulier que vaut u_9 ?
   (c) Calculer la somme totale payée par le locataire à l'issue des 9 années de contrat.
2. Contrat $n°2$.
   Le locataire accepte une augmentation annuelle de 1 500 du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer v_2 payé la deuxième année de location.
   (b) Exprimer le loyer v_n payé la $n^{ième}$ année de location en fonction de n.
   En particulier que vaut v_9 ?
   (c) Calculer la somme totale payée par le locataire à l'issue des 9 années de contrat.
3. Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire?

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale définie par:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. On se propose d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

   (a) Etudier les variations de f et préciser ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

   (b) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité = 4cm).

   (c) Calculer l'intégrale I_1, et indiquer quelle est sa signification géométrique.

2. On se propose d'étudier la suite (I_n).

   (a) Etablir que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, on a : $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$, puis prouver l'encadrement suivant :
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$
   En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que $(n + 1)I_n = 1 + I_{n+1}$.
   En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = n!e - I_n$, dans le but d'établir que le nombre e n'est pas rationnel.

   (a) Calculer u_1, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis en déduire par récurrence que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, u_n est un nombre entier.

   (b) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.a) que $n!e = u_n + I_n$ n'est pas entier.

   (c) On suppose qu'il existe des entiers p et q strictement positifs tels que $e = \frac{p}{q}$.
   Montrer que, pour $n \geqslant q$, le nombre $n!\frac{p}{q}$ est entier, et, à l'aide de la question précédente, en déduire une contradiction.
   En déduire que le nombre e n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 3

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle deux dés équilibrés, et jouent de la façon suivante :
A lance une première fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 6, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
Sinon, B lance une première fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 7, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
Sinon, A lance une deuxième fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 6, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
Sinon, B lance une deuxième fois les deux dés. Si la somme des deux chiffres obtenus est égale à 7, il est déclaré gagnant et le jeu cesse.
Et l'on continue ainsi jusqu'à ce que A ou B gagne.

1. On lance deux dés équilibrés.

   (a) Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres obtenus soit égale à 6 ?

   (b) Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres obtenus soit égale à 7 ?

2. On détermine les probabilités p_n, q_n des événements A_n, B_n définis par :

   $A_n =$ "A gagne la partie lorsque, pour la $n^{ième}$ fois il lance les deux dés."

   $B_n =$ "B gagne la partie lorsque, pour la $n^{ième}$ fois il lance les deux dés."

   (a) Calculer la probabilité des événements A_1, B_1, A_2, B_2.

   (b) Calculer les probabilités p_n, q_n des événements A_n, B_n.

3. On détermine la probabilité pour que A gagne le jeu, pour que B gagne le jeu.

   (a) Déterminer les sommes des deux séries suivantes:

   $$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad q = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$$

   Vérifier que $p + q = 1$.

   (b) En déduire la probabilité pour que A gagne le jeu, puis pour que B gagne le jeu.

4. On étudie la durée moyenne du jeu. A cet effet, on introduit la variable aléatoire N égale à n si c'est à l'issue du $n^{ième}$ jet des deux dès que le jeu cesse.

   (a) Vérifier l'égalité des événements $N = 1$ et A_1, $N = 2$ et B_1, $N = 3$ et A_2, $N = 4$ et B_2.
   Comparer plus généralement les événements $N = 2n-1$ et A_n et $N = 2n$ et B_n.

   (b) En déduire la loi de probabilité, l'espérance, la variance de la variable aléatoire N.