ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1

L'objet de ce problème est 1'étude des jets d'un dé, puis d'un ensemble de n dés.

1. **Calcul de sommes de séries**.
   On considère dans cette question un nombre entier $n \geqslant 1$ et la fonction définie sur l'intervalle $[0;1[$ par :
   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
   (a) Calculer $(1-x)S_n(x)$ et en déduire une expression de $S_n(x)$.
   En déduire, pour $0 \leqslant x < 1$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
   (b) Dériver $S_n(x)$ et déterminer la limite de la suite $(nx^n)_n$ quand n tend vers $+\infty$.
   En déduire, pour $0 \leqslant x < 1$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

2. **Étude du jet d'un dé équilibré à 6 faces**.
   On lance indéfiniment un dé équilibre et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, le dé donne l'as.
   (a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 1$ les probabilités des événements $T = k$, $T \leqslant k$.
   (b) En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

3. **Étude du jet de n dés équilibrés à 6 faces**.
On considère le jeu suivant : on lance indéfiniment un ensemble de n dés équilibrés, numérotés $1, 2, ..., n$ (où le nombre entier n est supérieur ou égal à 1).
Autrement dit, on lance une première fois les n dés, puis on relance une seconde fois ces n dés, et ainsi de suite. On désigne par :

   - N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où , pour la première fois, chacun des n dés a amené au moins une fois l'as.
   - T_j la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où , pour la première fois, le $j^{\text{ème}}$ dés a amené l'as $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

   Dans la suite de la question, on note k un nombre entier supérieur ou égal à 1.

   (a) Déterminer la probabilité $P(N = 1)$.
   (b) Comparer les événements$(N \leqslant k)$ et $(T_1 \leqslant k) \cap (T_2 \leqslant k) \cap \cdots \cap (T_n \leqslant k)$.
   En déduire les probabilités $P(N \leqslant 2)$ et $P(N = 2)$, puis, plus généralement, $P(N \leqslant k)$ et $P(N = k)$.
   (c) Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Vérifier alors que :$P(N = k) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} - \dfrac{11}{36}\left(\dfrac{25}{36}\right)^{k-1}$
   En déduire, sous forme de fraction irréductible, l'espérance $E(N)$ de N.
   (d) Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Déterminer de même $E(N)$.
   (e) On revient au cas général où l'entier n est supérieur ou égal à 1 , et l'on s'intéresse à la médiane de la variable aléatoire N.
      - Établir pour tout nombre réel x l'inégalité $1 - e^{-x} \leqslant x$.
      - En déduire que l'inégalité $P(N \leqslant k) \leqslant 0,5$ implique l'inégalité :

      $$k \geqslant \frac{\ln(n) - \ln(\ln(2))}{\ln(6) - \ln(5)} = 5,48... \ln(n) + 2,01...$$

      - En déduire un nombre entier naturel auquel k est supérieur ou égal dans chacun des trois cas

      $$n = 10, \quad n = 50, \quad n = 100.$$

   (f) Écrire un algorithme (en PASCAL) permettant le calcul successif des 30 premiers termes de la suite $(k \mapsto P(N \leqslant k))$ lorsque l'entier n est donné.
   Déterminer à l'aide de cet algorithme les plus petites valeurs de l'entier k pour lesquelles on a $P(N \leqslant k) \leqslant 0,5$ lorsque $n \in \{10; 50; 100\}$.
   Comparer ces résultats à ceux obtenus précédemment à la question e).

Problème 2

L'objet de ce problème est l'étude des racines réelles du polynôme P_n défini pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

1. **Étude de P_n pour $n \leqslant 3$.**
Étudier les variations et tracer sur une même figure (avec pour unité 2 centimètres) les courbes représentatives des polynômes P_n pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$.

2. **Comparaison de $\exp(x)$ et $P_n(x)$**

   (a) Établir que $P_n(x) \leqslant \exp(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel positif x.

(b) Établir que $P_{2n+1}(x) \leqslant \exp(x) \leqslant P_{2n}(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel négatif x.
(on pourra par exemple raisonner par récurrence).

3. **Étude du nombre de racines réelle de $P_n(x)$**

(a) Déduire de la question 2 le nombre des racines et le signe de P_{2n} sur P.

(b) Comparer la dérivée de P_{2n+1} avec P_{2n} . En déduire que le polynôme P_{2n+1}possède une racine réelle unique, et que celle-ci est strictement négative.
On note désormais x_n l'unique racine du polynôme P_{2n+1}. Ainsi $x_0 = -1$.

(c) Déduire des résultats précédents les variations de P_{2n}et de P_{2n+1} puis donner sur une même figure l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto P_{2n+1}(x)$, $x \mapsto P_{2n+1}(x)$ et $x \mapsto \exp(x)$ sur P.

4. **Détermination du polynôme P_3.**

(a) Établir qu ' un nombre réel x est racine de l'équation $P_3(x) = 0$ si et seulement si $t = x + 1$ est racine de l'équation $t^3 + 3t + 2 = 0$.

(b) Étudier les variations du polynôme $P(t) = t^3 + 3t + 2$ et prouver que celui-ci admet une racine réelle et une seule que l'on convient de noter r.

- En considérant l'équation du second degré $z^2 - rz - 1 = 0$, établir l'existence de deux nombres réels u, v de somme égale à r , de produit égal à -1.
- En remarquant que $P(u+v) = 0$, déterminer la somme $u^3 + v^3$, puis écrire une équation du second degré dont les deux racines sont u^3 et v^3.
- Résoudre cette équation afin d'en déduire u^3 et v^3, puis u et v , et enfin r que l'on exprimera à l'aide des racines cubiques des nombres $\sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2} + 1$.

(c) En déduire que la racine x_1 du polynôme P_3 est égale à $r - 1$ et préciser une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1.

5. **Étude de la suite des racines $(x_n)_n$ des polynômes P_{2n+1}.**

(a) En groupant les termes deux par deux dans $P_{2n+1}(-2n-1)$, déterminer le signe de $P_{2n+1}(-2n-1)$, pour tout entier naturel n. En déduire que $-2n - 1 \leqslant x_n$.

(b) Étudier le signe de $P_{2n+3}(x_n) - P_{2n+1}(x_n)$. En déduire que $x_{n+1} < x_n$.

(c) Établir a l'aide de la question 2 l'inégalité : $0 < \exp(x_n) \leqslant -\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(d) On se propose d'établir enfin que la suite $(x_n)_n$ diverge vers - ∞. À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que la suite $(x_n)_n$ est minorée. Établir :

- que la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite réelle $L < 0$ (on citera clairement le théorème utilisé).
- que pour tout nombre entier naturel n , $-\dfrac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!} \leqslant -\dfrac{L^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- que le nombre $\exp(L)$ est nul (on étudiera d'abord la limite de la suite $k \mapsto \dfrac{L^k}{k!}$).

Conclure.